Une marche aléatoire

Monsieur l'indécis a trois amis A, B et C. A chaque étape de sa marche aléatoire :

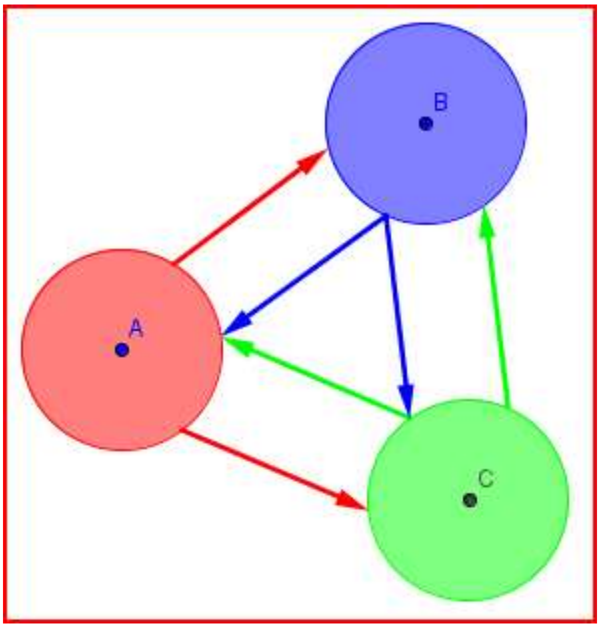
- S'il est chez A, il va chez B ou C avec une probabilité de 1/3 pour B,
- S'il est chez B, il va chez A ou C avec une probabilité de 3/4 pour A,
- S'il est chez C, il va chez A ou B de façon équiprobable.

Une problématique

Il part de chez A, B ou C et arrête sa promenade au bout de 3 étapes. Chez qui a-t-il alors le plus de chance de se trouver ?

Un graphe probabiliste

Recopier et compléter le graphe ci-contre par des probabilités le long des flèches.



A l'aide d'un arbre pondéré

On suppose que l'indécis part de A. Réaliser un arbre des probabilités pour une marche en trois étapes. Calculer les probabilités que l'indécis soit en A, en B, en C en trois étapes ?

Pour répondre à la problématique, il faudrait construire à nouveau deux arbres semblables au premier, selon que l'indécis part de B, ou de C… Cette démarche, vite fastidieuse, trouve ici ses limites… L'utilisation des matrices va nous permettre de résoudre ce problème plus rapidement.

A l'aide d'une matrice

On introduit une matrice T, à 3 lignes et 3 colonnes, appelée matrice de transition, formée par les probabilités de passage en une étape de A, B ou C à A, B ou C comme indiqué ci-dessous :

$$T = \begin{pmatrix} p(A \to A) & p(A \to B) & p(A \to C) \\ p(B \to A) & p(B \to B) & p(B \to C) \\ p(C \to A) & p(C \to B) & p(C \to C) \end{pmatrix}$$

Ecrire la matrice T avec tous ses coefficients. Quelle remarque peut-on faire sur la somme des coefficients d'une ligne de la matrice de transition ? Calculer T^3. Quelles probabilités reconnaît-on dans les coefficients de la première ligne de cette matrice ? A quoi correspondent les coefficients de la seconde ligne, de la troisième ligne ?

Réponse à la problématique

A la fin d'une marche aléatoire en trois étapes, chez quel ami Monsieur l'indécis aurait-il le plus de chance terminer sa marche s'il est parti de A ? Et s'il est parti de B ? Et s'il est parti de C ?

Flotte de caddies

Un supermarché dispose sur son parking de 3 points d'attache des caddies : le point (1), le point (2) et le point (3). On suppose qu'à la fermeture du magasin chaque caddie se trouve attaché à l'un des points (1), (2) ou (3).

	1	2	3
1	0,3	0,3	0,4
2	0,4	0,4	0,2
3	0,5	0,3	0,2

Pour i et j dans {1 ;2 ;3} on note p_{ij} la probabilité conditionnelle qu'un caddie attaché au point (i) soit, le lendemain, attaché au point (j). Les valeurs des p_{ij} sont supposées connues et données par le tableau proposé ci-dessus.

Les pérégrinations d'un caddie

On s'intéresse à un caddie donné qui, ce lundi soir, est attaché au point (1). Quelles sont les probabilités qu'il soit attaché mercredi soir, à chacun des points (1), (2) et (3) ? Utilisez un arbre.

Dans cette question, on suppose connues les probabilités x_1, x_2 et x_3 qu'un caddie soit attaché un soir donné aux points (1), (2) et (3). On s'intéresse aux probabilités d'attache, le lendemain, aux points (1), (2) et (3) que l'on note y_1, y_2 et y_3.

Montrer que $y_1 = 0,3x_1 + 0,4x_2 + 0,5x_3$. Donner une formule analogue pour y_2 et pour y_3. En notant $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ déterminer la matrice T telle que les trois relations précédentes se traduisent par $Y = X \times T$. Que représentent les coefficients de chaque ligne de la matrice T ? Que peut-on dire de leur somme ?

On s'intéresse à nouveau au caddie qui, ce lundi soir, est attaché au point (1). Calculer la probabilité que ce caddie se retrouve à son point d'attache (1) le mercredi soir. Calculer T^2. Comparer son coefficient première ligne et première colonne avec la probabilité calculée auparavant. Comment peut-on interpréter chaque coefficient de la matrice T^2.

On rappelle que la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ donne l'état probabiliste de la situation un soir donné. On considère la matrice $Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ tel que $Z = X \times T^2$. Quel état probabiliste de la situation nous donne cette matrice $Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$?

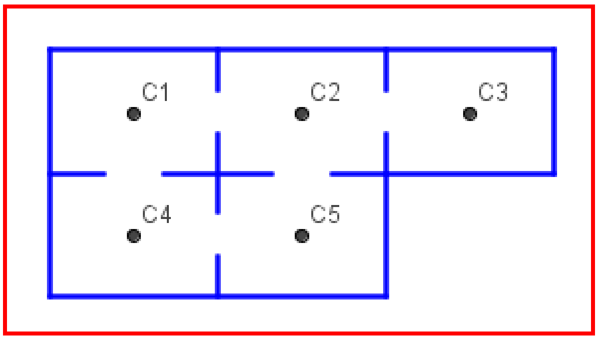
L'état de la flotte de caddies

On suppose que le supermarché dispose d'une flotte de 1000 caddies. La répartition organisée le dimanche soir est de 100 caddies au point (1), 700 caddies au point (2) et 200 caddies au point (3). On souhaite connaître l'état de la flotte le vendredi soir.

Déterminer la matrice $D = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix}$ associée à l'état probabiliste du dimanche soir. Exprimer la matrice $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$ associée à l'état probabiliste du vendredi soir à l'aide d'une formule matricielle. Avec une calculatrice ou un logiciel, déterminer l'état de répartition probabiliste des caddies le vendredi soir. Peut-on déterminer le nombre de caddies en chaque point le vendredi soir ?

Une histoire de labyrinthe

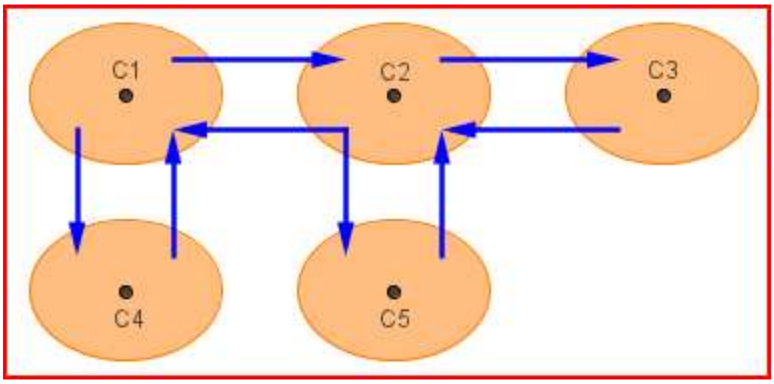
Une souris est lâchée dans le labyrinthe ci-contre. Elle se déplace en changeant de compartiment et pour un déplacement donné, on note n le nombre de franchissements de porte qu'elle a effectué depuis son point de départ. Pour changer de compartiment, on considère que la souris choisit sa porte au hasard parmi celles qui lui sont accessibles, indépendamment de son parcours antérieur.



Comment prévoir les probabilités de position après quelques changements de compartiment ?

Graphe probabiliste et matrice de transition

On souhaite représenter la situation par un graphe probabiliste. Pour cela vous reproduirez et compléterez le schéma proposé ci-contre.



Déterminer ensuite la matrice de transition T associée au graphe probabiliste.

Puissance quatrième et interprétation

Calculer T^4. On suppose qu'au départ la souris est lâchée dans le compartiment C1. Quelles sont les probabilités qu'à l'issue des quatre étapes elle se situe dans les compartiments C1, C2, C3, C4 et C5. Même question si la souris est lâchée au départ dans le compartiment C4. Est-il possible qu'elle rejoigne, en exactement 4 étapes, le compartiment 5 ?

Un exemple d'état probabiliste stable

La souris est maintenant lâchée au départ de façon aléatoire dans un des 5 compartiments.

K	1	2	3	4	5
P(X=k)	0,2	0,3	0,1	0,2	0,2

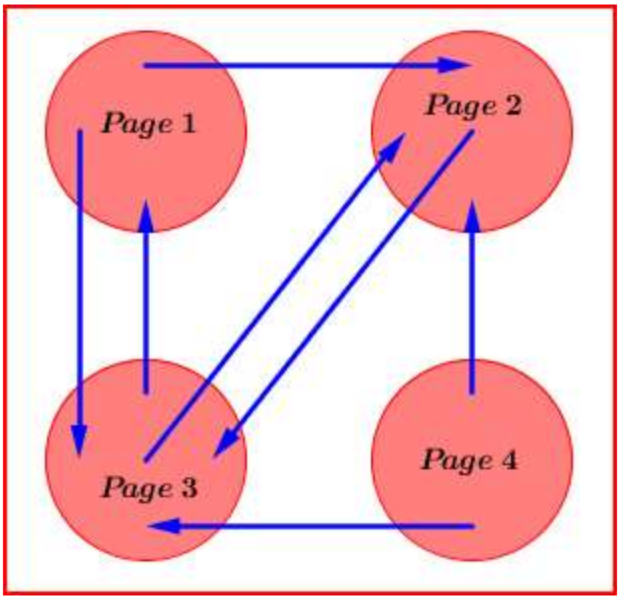
On note X la variable aléatoire qui désigne le numéro de compartiment de départ. On suppose que la loi de probabilité de X est donnée par le tableau proposé ci-dessus.

On note V_0 la matrice ligne définie par $V = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$. Calculer le produit $V_0 \times T$. Quelle remarque faîtes-vous ?

Donner la probabilité de présence de la souris dans chaque compartiment après 2013 étapes.

Mise en place d'un mini-réseau intranet

Une entreprise expérimente la mise en place d'un mini-réseau intranet pour son personnel. Pour l'instant, le réseau ne donne accès qu'à 4 pages numérotées (1), (2), (3) et (4). Ces pages comportent un ou plusieurs liens qui pointent chacun vers l'une des autres pages. L'organisation de cette « toile » miniature peut être visualisée sur le schéma proposé ci-contre.



Comprendre le schéma et émettre une conjecture

Un employé entre sur le réseau par la page (4). Sur quelle(s) page(s) peut-il se rendre en un seul clic ? En exactement deux clics ? Peut-il repasser par la page (4) lors de sa navigation sur le réseau ?

Dans quel ordre rangeriez-vous ces quatre pages, par ordre décroissant de fréquentation ?

Graphe probabiliste et matrice de transition

On suppose dorénavant qu'un employé « distrait » explore le réseau au hasard : une fois qu'il est entré par l'une des pages, il clique au hasard sur un des liens figurant sur cette page et il continue sa navigation de la sorte sans se préoccuper de son parcours antérieur. Reproduire et compléter le graphe probabiliste proposé ci-dessus. Ecrire la matrice de transition T associée à ce graphe probabiliste. A l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, calculer T^3, T^4, T^8. En déduire les probabilités qu'un employé « distrait » se rende en cliquant au hasard : de la page (2) à la page (3) en trois clics ? de la page (3) à la page (4) en quatre clics ? de la page (4) à la page (3) en huit clics ?

Mise en place d'une variable aléatoire

On note Y_n la variable aléatoire qui représente la page sur laquelle l'employé se trouve après n clics et X_n la matrice ligne représentant la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_n, c'est-à-dire : $X_n = \big(p(Y_n=1) \quad p(Y_n=2) \quad p(Y_n=3) \quad p(Y_n=4)\big)$. Justifier que $X_{n+1} = X_n \times T$. Exprimer X_n en fonction de X_0, de T et de n. Justifier votre réponse. Calculer X_8 lorsque $X_0 = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$, puis lorsque $X_0 = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 0)$, puis lorsque $X_0 = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$, puis lorsque $X_0 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$. Les probabilités d'atteindre chacune des 4 pages dépendent-elles fortement de la page par laquelle l'employé est entré sur le réseau ?

Remise en cause de la conjecture

Calculer T^{15}, T^{20} et T^{50}. Qu'observe-t-on ? Vérifier que quelle que soit la matrice ligne X_0, la matrice ligne X_n semble se stabiliser quand n devient grand autour de $X = (2/3 \quad 1/3 \quad 4/9 \quad 0)$

Quel classement, dans l'ordre décroissant des indices de pertinence, obtient-on pour ces quatre pages du mini-réseau intranet ? Reprendre et critiquer si nécessaire la conjecture émise au départ.

Mouvements de population

On suppose que la population d'un pays reste constante et égale à 60 millions d'habitants. Les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Chaque année 20% des ruraux émigrent en ville et 10% des citadins émigrent en zone rurale. Au 1er janvier 2012, il y a 20 millions de citadins et 40 millions de ruraux. On cherche à connaître l'évolution du système au fur et à mesure des années.

On note pour tout n entier naturel , c_n (respectivement r_n) le nombre de citadins (respectivement de ruraux) exprimés en millions pour l'année $2012+n$.

Etude avec les suites numériques

Montrer que $\begin{cases} c_{n+1}=0,9c_n+0,2r_n \\ r_{n+1}=0,1c_n+0,8r_n \end{cases}$ et en déduire que $\begin{cases} c_{n+1}=0,7c_n+12 \\ r_{n+1}=0,7r_n+6 \end{cases}$. Déterminer le réel a tel que $a=0,7a+12$. Montrer que la suite c_n-a est géométrique et en déduire l'expression du terme général de c_n puis de r_n en fonction de n. Déterminer les limites des suites (c_n) et (r_n).

Interprétation matricielle

On note H_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} c_n \\ r_n \end{pmatrix}$. Montrer que le système mis en place précédemment peut s'écrire sous la forme $H_{n+1}=A\times H_n$ où A est un matrice carrée d'ordre 2 que vous déterminerez. En déduire que pour tout n entier naturel on a $H_n=A^n\times H_0$ où H_0 est une matrice colonne dont vous préciserez les coefficients.

Démontrer que pour tout n entier naturel différent de 1 on a $A^n=\begin{pmatrix} \frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times 0,7^n & \frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times 0,7^n \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times 0,7^n & \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times 0,7^n \end{pmatrix}$

Déterminer pour tout n entier naturel différent de 1 la matrice colonne H_n. En déduire l'expression du terme général de c_n puis de r_n en fonction de n. Conclure.

Poussins et benjamins

Dans un club sportif, chaque année la moitié des benjamins part en minimes, l'autre moitié reste en benjamins, la moitié des poussins part en benjamins, l'autre moitié reste en poussins. Le club recrute aussi, chaque année, 15 nouveaux adhérents en catégorie poussins et 10 en catégorie benjamins. A sa création, année notée 0, le club comptait 35 poussins et 60 benjamins. On souhaite prévoir l'évolution des nombres de poussins et de benjamins en supposant que les mouvements sont les mêmes d'une année à l'autre.

On note b_n et p_n les nombres de benjamins et de poussins l'année n (on acceptera des résultats non entiers).

Modélisation à l'aide de matrices

1. Montrer que la situation se traduit par les relations de récurrence $\begin{cases} p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + 15 \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}p_n + 10 \end{cases}$.

2. Soit U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} p_n \\ c_n \end{pmatrix}$ pour n entier naturel. Ecrire le système précédent sous la forme $U_{n+1} = AU_n + B$ où A est une matrice carrée et B une matrice colonne.

Calcul de A puissance n

3. Déterminer la matrice T telle que $A = \frac{1}{2}Id + T$, puis calculer T^2.

4. Calculer A^2 en fonction de Id et T. En déduire A^3.

5. Montrer par récurrence, pour $n \geq 1$, que $A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (Id + 2nT)$. En déduire A^n.

Calcul de Un : première méthode, à l'aide d'une suite auxiliaire

6. Déterminer une matrice $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ telle que $X = AX + B$.

7. En déduire que la suite V_n définie par $V_n = U_n - X$ vérifie, pour $n \geq 1$, $V_{n+1} = AV_n$.

8. En déduire V_n en fonction de V_0 puis montrer que $U_n = A^n(U_0 - X) + X$.

9. Déduire des résultats précédents les expressions de p_n et de b_n en fonction de n.

10. En déduire l'évolution du nombre de poussins et de benjamins quand n devient grand.

Calcul de Un : deuxième méthode par sommation

11. De la relation $U_{n+1} = AU_n + B$ pour tout $n \geq 0$, déduire U_1, puis U_2, puis U_3 en fonction de A, de U_0 et de B.

12. On rappelle que $A^0 = Id$.
Démontrer par récurrence que, pour $n \geq 1$, $U_n = A^n U_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} A^k\right) B$.

13. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} A^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k & 0 \\ 2\sum_{k=0}^{n-1} k\left(\frac{1}{2}\right)^k & \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k \end{pmatrix}$.

14. Indication $\sum_{k=0}^{n-1} k\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{-2n-2}{2^n} + 2$. Calculer la matrice $\sum_{k=0}^{n-1} A^k$.

15. Retrouver ainsi les limites des suites b_n et p_n

Exercice d'application directe

On considère la suite U_n de matrice colonne telle que $U_{n+1} = AU_n + B$ pour tout $n \geq 0$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \end{pmatrix}$ et $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Déterminer une suite constante égale à X vérifiant la même relation de récurrence. Soit $V_n = U_n - X$ pour $n \geq 0$. Montrer que $V_{n+1} = AV_n$. En déduire V_n en fonction de V_0. En déduire que pour tout $n \geq 0$, $U_n = A^n (U_0 - X) + X$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. En déduire U_n en fonction de n.

Exercice d'application directe

On considère les suites a_n, b_n et c_n définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 1$ et $c_0 = 1$ et par les relations de récurrence : $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 0{,}5c_n \\ b_{n+1} = 0{,}5a_n + b_n + 0{,}5c_n \\ c_{n+1} = 0{,}5c_n + 1 \end{cases}$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 1 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ecrire X_{n+1} en fonction de X, A et B. En déduire que pour tout $n \geq 0$ $X_n = A^n X_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} A^k\right) B$. Un logiciel de calcul donne $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-(0{,}5)^n \\ 0{,}5n & 0 & 0{,}5n \\ 0 & 0 & (0{,}5)^n \end{pmatrix}$. En déduire l'expression des suites a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Eviter les bouchons

Max va tous les jours à son travail en empruntant le chemin A ou le chemin B. S'il y a des encombrements sur son trajet, il change d'itinéraire le lendemain. La probabilité d'encombrements est égale à $1/4$ sur le trajet A et à $1/2$ sur le trajet B. Peut-on prévoir comment évoluera son trajet dans un grand nombre de jours.

Un graphe probabiliste

Représenter le graphe probabiliste associé à cette situation et écrire la matrice de transition M associée. Soit P_n la matrice ligne donnant l'état probabiliste du choix d'itinéraire de Max le nième jour ($n \geq 1$). On a donc $P_n = \begin{pmatrix} p_n & 1-p_n \end{pmatrix}$, où p_n est la probabilité que Max choisisse le trajet A le nième jour. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n, puis P_n en fonction de P_1.

Calcul de M puissance n

On considère les deux matrices colonnes $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $MV = \lambda V$ et $MW = \mu W$ où λ et μ sont deux réels à préciser. Soit P la matrice carrée de première colonne V et deuxième colonne W et $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et préciser P^{-1}.

En déduire le calcul de PDP^{-1}. Que constate-t-on ? En déduire le calcul de M^2 puis de M^3. Démontrer par récurrence que $M^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \geq 1$. En déduire les coefficients de M^n en fonction de n.

Retour au problème

On suppose que le premier jour, Max choisit A ou B de manière équiprobable. Donner la matrice P_1 et en déduire la matrice P_n. Montrer que P_n tend vers une matrice L quand n tend vers l'infini et que $LM = L$. Ceci est-il encore vrai si on change l'état initial ?

Diagonalisation d'une matrice

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Soit $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Montrer que $AV = \lambda V$ et $AW = \mu W$ où λ et μ sont deux réels à préciser. Soit P la matrice carrée de première colonne V et deuxième colonne W et $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

Vérifier que P est inversible et préciser P^{-1}. En déduire le calcul de PDP^{-1}. Que constate-t-on ? En déduire les coefficients de M^n en fonction de n.

Campagne de communication

Deux fabricants de parfum lancent simultanément leur nouveau produit nommés respectivement Aurore et Boréale. Pour mesurer l'efficacité des campagnes publicitaires, on interroge chaque semaine les mêmes personnes qui toutes se prononcent en faveur de l'un de ces deux produits.

Au début de la campagne, 20% des personnes interrogées préfèrent Aurore et les autres préfèrent Boréale. Les arguments publicitaires font évoluer cette répartition : 10% des personnes préférant Aurore et 15% des personnes préférant Boréale changent d'avis d'une semaine sur l'autre.

La semaine du début de la campagne est notée semaine 0. Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste de la semaine n est défini par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$, où a_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère Aurore la semaine n et b_n désigne la probabilité qu'une personne interrogée au hasard préfère Boréale la semaine n.

Déterminer la matrice ligne $P_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix}$ de l'état probabiliste de l'état probabiliste initial. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, A pour Aurore et B pour Boréale. Ecrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets. Montrer que $P_1 = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$. Exprimer, pour tout entier naturel n, P_n en fonction de P_0 et de n

On cherche λ réel tel qu'il existe une matrice non nulle $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ telle que $MV = \lambda V$. Justifier que $M - \lambda \times Id$ ne doit pas être inversible. En déduire les valeurs λ_1 et λ_2 possibles pour λ. Déterminer deux matrices colonnes V_1 et V_2 non proportionnelles telles que $MV_1 = \lambda_1 V_1$ et $MV_2 = \lambda_2 V_2$. En déduire une matrice carrée P et une matrice diagonale D telle que $M = PDP^{-1}$.

En déduire que $M^n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n & \frac{2}{5} - \frac{2}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n & \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \end{pmatrix}$. Déterminer la limite M_∞.de la suite M^n lorsque n tend vers $+\infty$. Déterminer l'état limite P_∞, limite de P_n lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer que $P_\infty M = P_\infty$. Le parfum Aurore finira-t-il par être préféré au parfum Boréale ?

Diagonalisation d'une matrice

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. On cherche λ réel tel qu'il existe une matrice non nulle $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ telle que $AV = \lambda V$. Justifier que $A - \lambda \times Id$ ne doit pas être inversible. En déduire les valeurs λ_1 et λ_2 possibles pour λ. Déterminer deux matrices colonnes V_1 et V_2 non proportionnelles telles que $AV_1 = \lambda_1 V_1$ et $AV_2 = \lambda_2 V_2$. En déduire une matrice carrée P et une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$. En déduire l'expressions des coefficients de la matrice A^n en fonction de n.

Exercice 1

Dans une région, on considère trois types de temps : beau, variable, pluvieux. On sait que :

- s'il fait beau un jour donné, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est $1/3$ et la probabilité qu'il pleuve est $1/6$,

- si le temps est variable, la probabilité qu'il soit variable le lendemain est $1/4$ et la probabilité qu'il pleuve est $1/2$,

- s'il pleut, la probabilité qu'il pleuve le lendemain est $1/4$ et la probabilité qu'il fasse beau est $1/2$.

Partie A

On note B = « le temps est beau », V = « le temps est variable » et P = « le temps est pluvieux ». On identifiera l'ensemble des états {B, V, P} à l'ensemble {1, 2, 3} et on notera X_n la variable aléatoire donnant l'état du temps au jour n.

1. Donner la matrice de transition T relative à ce processus aléatoire (on pourra s'aider d'un graphe probabiliste).

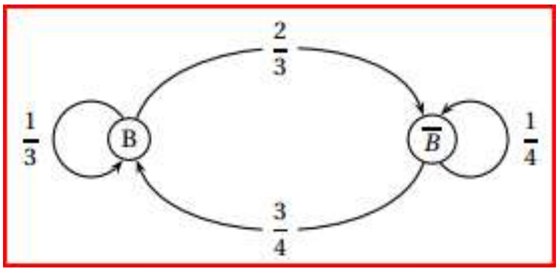
La loi de probabilité de la variable aléatoire X_n est définie par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} b_n & v_n & p_n \end{pmatrix}$ où b_n désigne la probabilité qu'il fasse beau au jour n, v_n désigne la probabilité que le temps soit variable au jour n, p_n désigne la probabilité qu'il pleuve au jour n. Aujourd'hui il fait beau, la matrice donnant la loi de probabilité initiale est donc $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. A l'aide d'une calculatrice, déterminer la probabilité de chaque type de temps le surlendemain, la probabilité de chaque type de temps dans une semaine (les probabilités seront arrondies au millième).

Partie B

Dans une autre région on note B l'état « il fait beau » et $\overline{B}$ l'état « il ne fait pas beau ». Les variations du temps sont représentées par le graphe probabiliste proposé ci-dessous. On identifie l'ensemble des états $\{ B\ \overline{B} \}$ à l'ensemble {1 ; 2} et on notera Y_n la variable aléatoire donnant l'état du temps au jour n.

On notera $Q_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_n (u_n est donc la probabilité que le temps soit beau au jour n et v_n est la probabilité que le temps ne soit pas beau au jour n).



3. Donner la matrice de transition T associée à ce processus aléatoire. On suppose qu'il fait beau aujourd'hui, on pose donc $Q_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Démontrer que $Q_{n+1} = Q_n \times T$ (on pourra s'aider d'un arbre et de la formule des probabilités totales). En déduire une expression de Q_n en fonction de Q_0, T et n.

Partie C

On cherche dans cette partie à déterminer une expression explicite des suites u_n et v_n. On pose pour cela $P = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1} (donner les valeurs exactes des coefficients).

2. Calculer $D = P^{-1}TP$ et démontrer que la matrice D est diagonale. En déduire que $T = PDP^{-1}$, puis que $T^n = PD^nP^{-1}$.

3. Calculer les coefficients de la matrice T^n en fonction de n.

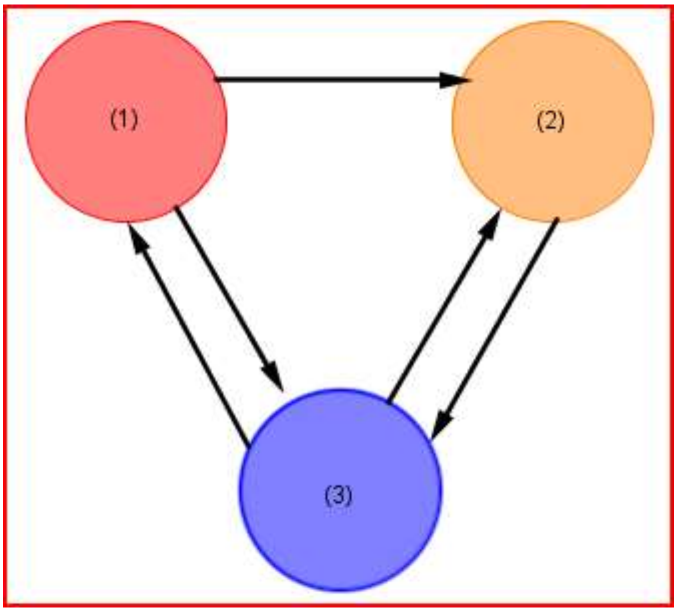
4. En déduire que $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{17}\left(9 + 8 \times \left(-\dfrac{5}{12}\right)^n\right) \\ v_n = \dfrac{1}{17}\left(8 - 8 \times \left(-\dfrac{5}{12}\right)^n\right) \end{cases}$

5. Quelle est la probabilité qu'il fasse beau dans 2 jours ? Dans une semaine ? Dans deux semaines ? (les probabilités seront arrondies au millième).

6. Déterminer l'état stationnaire de ce processus aléatoire, c'est-à-dire la matrice ligne Q telle que $Q = Q \times T$. Comparer Q à $Q_\infty = \lim\limits_{n \to \infty} Q_n$ et interprétez ce résultat.

Exercice 2

Un mini réseau internet comprend trois pages web : (1), (2) et (3). Les liens sont indiqués dans le graphe ci-dessous. Un surfeur aléatoire surfe indéfiniment sur ce réseau. A chaque clic, il choisit de façon équiprobable un des liens présents sur la page. Après n clics, on note X_n la variable aléatoire donnant la page sur laquelle se trouve le surfeur et P_n la matrice ligne $\begin{pmatrix} p(X_n = 1) & p(X_n = 2) & p(X_n = 3) \end{pmatrix}$ appelée état probabiliste à l'étape n.



1. Ecrire la matrice $\left(p_{i,j}\right)$ où $p_{i,j}$ désigne la probabilité d'aller à la page j en partant de i.
2. Démontrer que $P_{n+1} = P_n \times M$. En déduire l'expression de P_n en fonction de M et de P_0.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 8 & -2 & -6 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Calculer le produit $Q = P^{-1}MP$ et montrer que $Q = D + T$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer T^2.
4. Démontrer que $DT = TD = -0,5 \times T$ pour tout $n \geq 1$.
5. En déduire que $D^nT = (-0,5)^n T$.
6. Démontrer par récurrence, que $Q^n = D^n + n \times (-0,5)^{n-1} T$ pour tout $n \geq 1$. Démontrer que $M = PQP^{-1}$ et en déduire l'expression de M^n en fonction de P et de Q.
7. Déterminer $Q_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} Q^n$ et en déduire $M_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} M^n$. Déterminer $P_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$ et démontrer que cet état probabiliste limite ne dépend pas de l'état initial.
8. Quelle est la page web qui est atteinte avec la probabilité la plus grande par le surfeur après un très grand nombre de clics ?

Exercice 3

Un atome d'hydrogène peut se trouver dans deux états différents, l'état stable et l'état excité. À chaque nanoseconde, l'atome peut changer d'état.

Partie A - Étude d'un premier milieu

Dans cette partie, on se place dans un premier milieu (milieu 1) où, à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est $0,005$, et la probabilité qu'il passe de l'état excité à l'état stable est $0,6$.
On observe un atome d'hydrogène initialement à l'état stable.
On note a_n la probabilité que l'atome soit dans un état stable et b_n la probabilité qu'il se trouve dans un état excité, n nanosecondes après le début de l'observation.
On a donc $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$.
On appelle X_n la matrice ligne $X_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$.
L'objectif est de savoir dans quel état se trouvera l'atome d'hydrogène à long terme.

1. Calculer a_1 puis b_1 et montrer que $a_2 = 0{,}993025$ et $b_2 = 0{,}006975$.
2. Déterminer la matrice A telle que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = X_n A$.
   A est appelée matrice de transition dans le milieu 1.
   On admet alors que, pour tout entier naturel n, $X_n = X_0 A^n$.
3. On définit la matrice P par $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 120 \end{pmatrix}$.
   On admet que P est inversible et que
   $$P^{-1} = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.
4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. On admet par la suite que, pour tout entier naturel n,
   $$A^n = \frac{1}{121}\begin{pmatrix} 120 + 0,395^n & 1 - 0,395^n \\ 120(1 - 0,395^n) & 1 + 120 \times 0,395^n \end{pmatrix}.$$
   En déduire une expression de a_n en fonction de n.
6. Déterminer la limite de la suite (a_n). Conclure.

Partie B - Étude d'un second milieu

Dans cette partie, on se place dans un second milieu (milieu 2), dans lequel on ne connaît pas la probabilité que l'atome passe de l'état excité à l'état stable. On note a cette probabilité supposée constante. On sait, en revanche, qu'à chaque nanoseconde, la probabilité qu'un atome passe de l'état stable à l'état excité est $0,01$.

1. Donner, en fonction de a, la matrice de transition M dans le milieu 2.
2. Après un temps très long, dans le milieu 2, la proportion d'atomes excités se stabilise autour de 2 %.
   On admet qu'il existe un unique vecteur X, appelé état stationnaire, tel que $XM = X$, et que $X = \begin{pmatrix} 0,98 & 0,02 \end{pmatrix}$.
   Déterminer la valeur de a.

Exercice 4

Le droit de pêche dans une réserve marine est réglementé : chaque pêcheur doit posséder une carte d'accréditation annuelle. Il existe deux types de cartes :

- une carte de pêche dite « libre » (le pêcheur n'est pas limité en nombre de poissons pêchés) ;
- une carte de pêche dite « avec quota » (le pêcheur ne doit pas dépasser une certaine quantité hebdomadaire de poisson).

On suppose que le nombre total de pêcheurs reste constant d'année en année.
On note, pour l'année $2017+n$:

- ℓ_n la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche libre;
- q_n la proportion de pêcheurs possédant la carte de pêche avec quota.

On observe que :

- chaque année, 65 % des possesseurs de la carte de pêche libres achète de nouveaux une carte de pêche libre l'année suivante ;
- Chaque année, 45 % des possesseurs de la carte de pêche avec quota acheté une carte de pêche libre l'année suivante ;
- En 2017, 40 % des pêcheurs ont acheté une carte de pêche libre. On a donc $\ell_0 = 0{,}4$ et $q_0 = 0{,}6$.

On note, pour tout entier naturel n, $P_n = \begin{pmatrix} \ell_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = MP_n$, où M est la matrice carrée $\begin{pmatrix} 0{,}65 & 0{,}45 \\ 0{,}35 & 0{,}55 \end{pmatrix}$.
2. Calculer la proportion de pêcheurs achetant une carte de pêche avec quota en 2019.
3. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1 ○	$M := \{\{0{,}65, 0{,}45\}, \{0{,}35, 0{,}55\}\}$ ✓ $M := \begin{pmatrix} 0,65 & 0,45 \\ 0,35 & 0,55 \end{pmatrix}$
2 ○	$P_0 := \{\{0,4\}, \{0,6\}\}$ ✓ $P_0 := \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{pmatrix}$
3 ○	$Q := \{\{9, 1\}, \{7, -1\}\}$ ✓ $Q := \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$
4 ○	$T := \{\{1/16, 1/16\}, \{7/16, -9/16\}\}$ ✓ $T := \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{7}{16} & -\frac{9}{16} \end{pmatrix}$

5 ○	TQ $\to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
6 ○	QT $\to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
7 ○	$D := TMQ$ $\to D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

En vous appuyant sur les résultats précédents, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

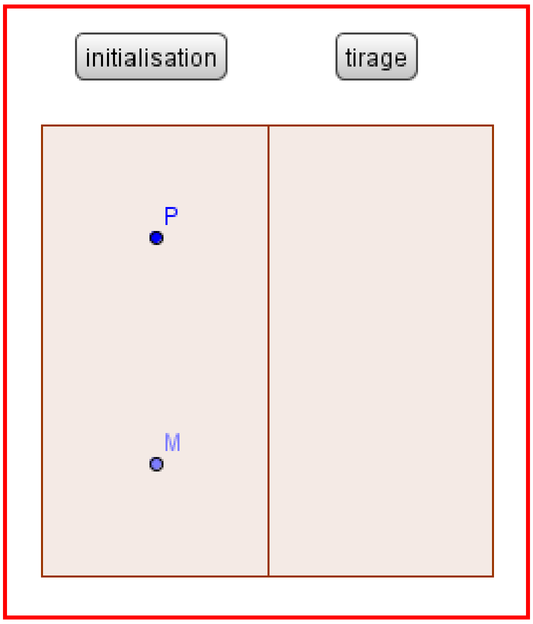
$$M^n = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 9+7\times 0{,}2^n & 9-9\times 0{,}2^n \\ 7-7\times 0{,}2^n & 7+9\times 0{,}2^n \end{pmatrix}.$$

Démontrer que pour tout entier naturel n, $P_n = M^n P_0$. Justifier que, pour tout entier naturel n :

$$\ell_n = \frac{9}{16} - \frac{13}{80} \times 0{,}2^n.$$

La proportion de pêcheurs achetant la carte de pêche libre dépassera-t-elle 60 % ?

Urnes d'Ehrenfest : cas de deux boules

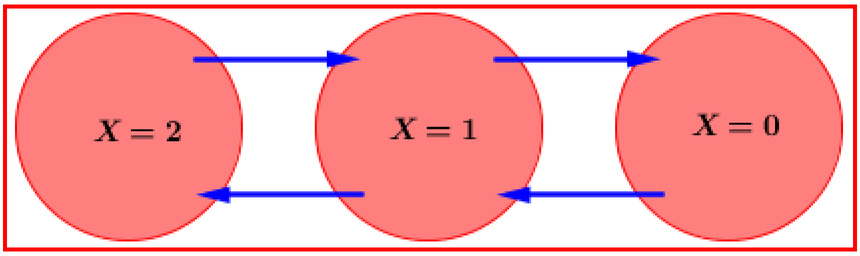


On dispose de deux boules (numérotées 1 et 2) et de deux urnes (appelées A et B). On s'intéresse à l'expérience aléatoire suivante. Un expérimentateur choisit au hasard un des numéros (1 ou 2), attrape la boule correspondante dans l'urne où elle se situe, et la change d'urne. On peut répéter k fois cette expérience, les choix successifs des numéros s'effectuant de manière indépendante. On considère qu'à l'état initial (k=0) les deux boules sont dans l'urne A. On s'intéresse à l'évolution du contenu de l'urne A et au temps de retour à l'état initial.

Mise en place d'une variable aléatoire

Les urnes sont translucides : on peut observer l'évolution de la répartition des urnes au cours du temps, sans que l'on puisse distinguer leurs numéros. La répartition de départ est représentée ci-dessus. A chaque étape k, la variable aléatoire X_k compte le nombre de boules figurant dans l'urne A. Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X_k ?

Passage d'une étape à l'étape suivante…



Reproduire et compléter le schéma proposé ci-contre. Ce schéma dépend-il de l'étape k ?

Pour tout i et j de $\{0;1;2\}$ on pose $p_{ij} = p_{X_k=i}(X_{k+1}=j)$ la probabilité conditionnelle suivante : sachant que l'état de l'urne A est i à l'étape k, p_{ij} est la probabilité que l'état de l'urne A soit j à l'étape suivante $k+1$. On note T la matrice 3 lignes 3 colonnes définie par $T=(p_{ij})$. A l'étape k on note R_k la matrice ligne définie : $R_k = \begin{pmatrix} p(X_k=0) & p(X_k=1) & p(X_k=2) \end{pmatrix}$. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que $R_{k+1} = R_k \times T$. En déduire une expression de R_k en fonction de la matrice ligne R_0, de la matrice de transition T, de l'entier k. Calculer « à la main » T^2 et T^3. En déduire que pour tout entier n impair on a $R_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, et que pour tout entier n pair on a $R_n = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$. Interpréter ces deux résultats.

Temps de retour à l'état initial

On considère $2n$ étapes et pour n entier naturel non nul on note T_n la variable aléatoire donnant le nombre d'étapes nécessaires pour un premier retour à l'état initial. Montrer que l'espérance de la variable T_n est $E(T_n) = 1 + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \ldots + \frac{n}{2^{n-1}}$. Calculer $E(T_5)$. Interpréter le résultat obtenu.