Repère, vecteurs et coordonnées dans l'espace

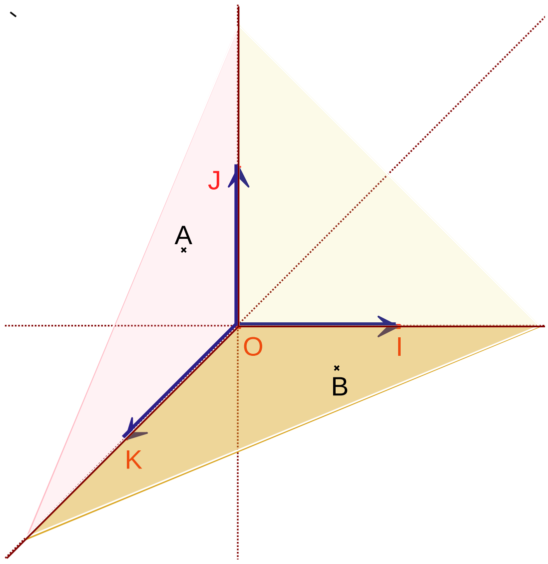
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$.

On considère deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$.

Cela signifie que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$.

Produit scalaire dans l'espace

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v}=x\times x'+y\times y'+z\times z'}$$



Distance dans l'espace

Si A et B sont deux points coordonnées respectives $\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et $\left(x_B;y_B;z_B\right)$:

$$\boxed{AB^2=\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$$

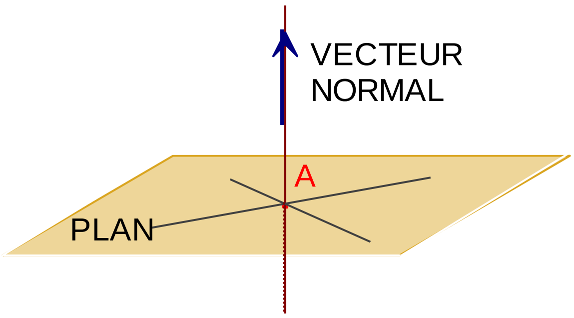
Orthogonalité plan – droite

Un vecteur $\vec{n}$ est dit **normal au plan** P lorsqu'il est porté par une droite orthogonale à ce plan.

Une droite est **orthogonale à un plan** lorsqu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Le plan passant par le point A et orthogonal au vecteur $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\boxed{\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0}$$



Equation générale de plan

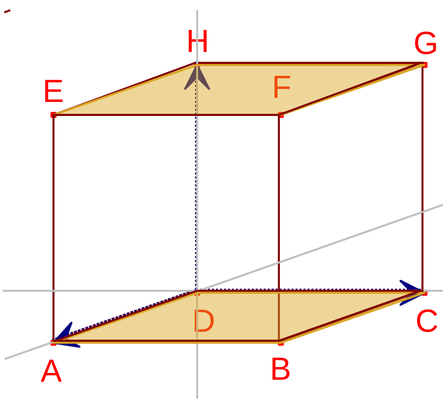
Si $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}}$ est un **vecteur normal** au plan P, alors une équation de P est $\boxed{ax+by+cz+d=0}$.

Réciproque : Si $\boxed{ax+by+cz+d=0}$ est une équation de P, alors $\boxed{\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}}$ est un **vecteur normal**.

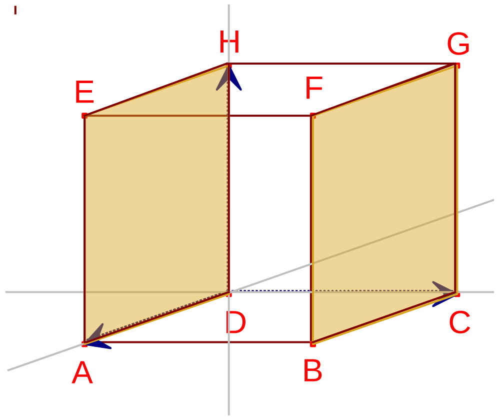
Plans particuliers

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête $a = 1$.

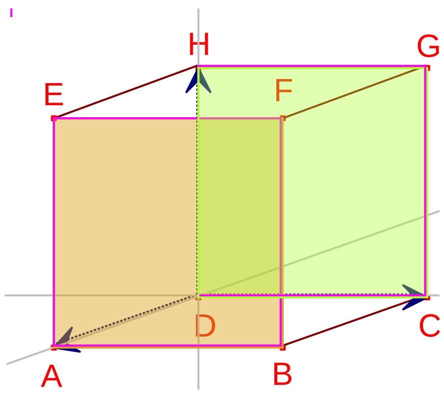
On considère l'espace rapporté au repère orthonormal $\left(D; \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DH}\right)$



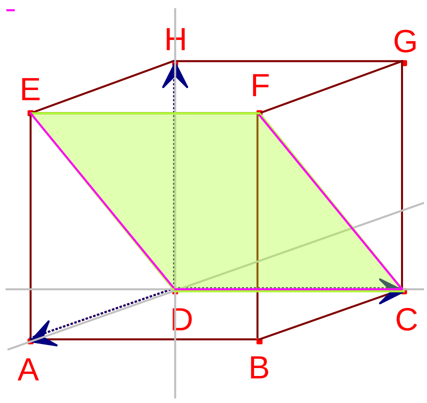
- Déterminer l'équations des plans (ABCD) et (EFGH).



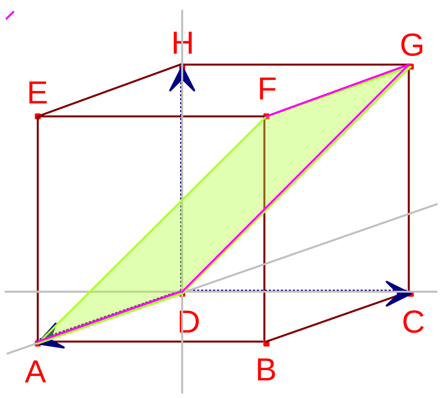
- Déterminer les équations des plans (ADHE) et (BCGF).



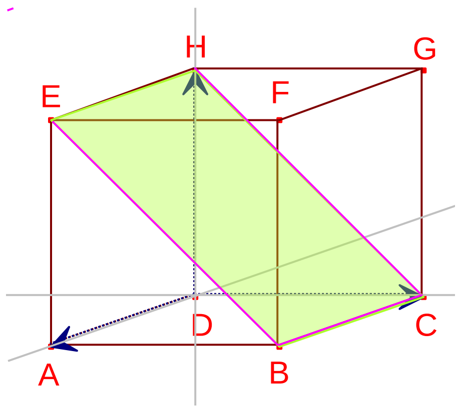
- Déterminer les équations des plans (ABFE) et (DCGH)



- Déterminer l'équation du plan (CDEF) ?



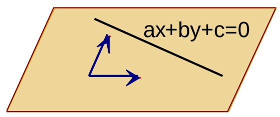
- Déterminer l'équation du plan (ADGF) ?



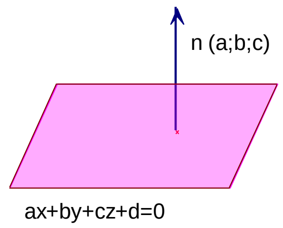
- Déterminer l'équation du plan (BCHE) ?

Equations

L'équation **d'une droite dans un plan**
muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$
est de la forme $\boxed{ax+by+c=0}$



L'équation **d'un plan dans l'espace**
muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$
est de la forme $\boxed{ax+by+cz+d=0}$



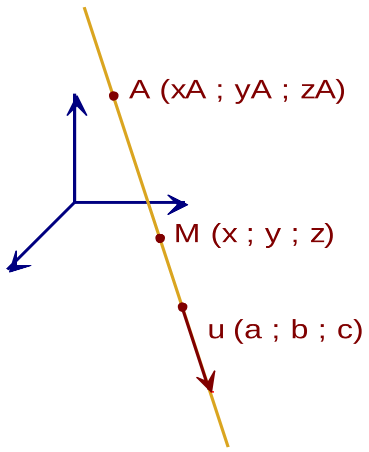
Qu'en est-il de l'équation **d'une droite dans l'espace** ?

Equation paramétrique d'une droite dans l'espace

Pour déterminer une droite dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ on donnera son **équation paramétrique** :

Un point quelconque $M\left(x;y;z\right)$ appartient à la droite, si et seulement si il existe $k \in IR$ tel que :

$$\boxed{\begin{cases} x = x_A + k\times a \\ y = y_A + k\times b \\ z = z_A + k\times c \end{cases}}$$



Ceci traduit le fait que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont **colinéaires**, c'est-à-dire $\boxed{\overrightarrow{AM} = k\times\vec{u}}$.

On dit alors que le vecteur $\vec{u}$ est **un vecteur directeur** de la droite.

Application 1

Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) dans chacun des cas suivants :

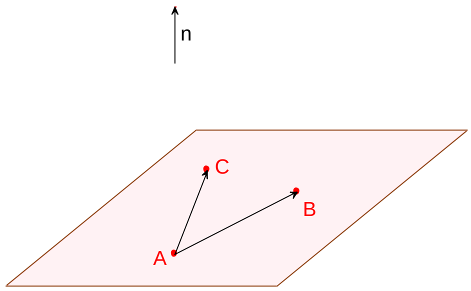
$A(1;2;3)$ et $B(1;0;-5)$ $\qquad$ $A(4;-1;2)$ et $B(5;0;-8)$ $\qquad$ $A(1;2;7)$ et $B(1;2;11)$

Application 2

Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A, perpendiculaire au plan P :

$A(5;2;0)$	$A(-1;3;4)$	$A(0;5;1)$
$(\mathrm{P})\ x+y+2z-5=0$	$(\mathrm{P})\ y-5z+10=0$	$(\mathrm{P})\ y+7=0$

Existence d'un plan
Vecteur normal à ce plan



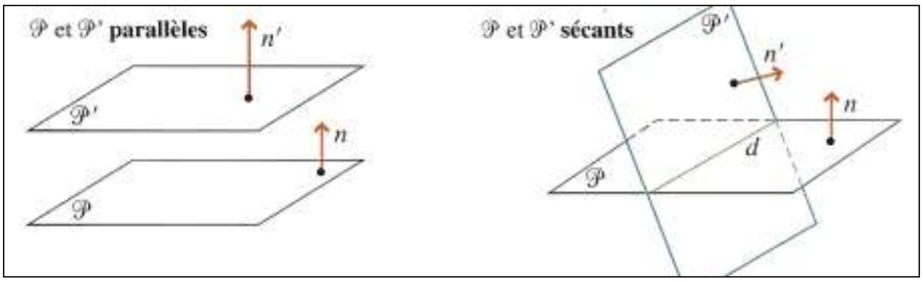
Trois points distincts de l'espace définissent un plan **à condition que** ces trois points **ne soient pas alignés**, et ces points ne sont pas alignés à condition que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ **ne soient pas colinéaires**.

Application

Montrer que les points $A(1;3;0)$ $B(-2;1;1)$ et $C(4;1;-2)$ déterminent un plan P dont vous déterminerez un vecteur normal, puis l'équation.

Intersection de deux plans

Soit P et P' deux plans **distincts**. Ces deux plans sont soit **sécants**, soit **parallèles**. Ceci dépend de la position relative des vecteurs normaux $\vec{n}$ et $\vec{n}'$.



Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ **sont colinéaires** alors les plans sont **parallèles** : ils n'ont **aucun point commun**.
Si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ **ne sont pas colinéaires** alors les plans sont **sécants** : leur intersection est **une droite**.

Propriété

Les deux plans d'équations respectives $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$ sont sécants si et seulement si les vecteurs $\vec{n}(a;b;c)$ et $\vec{n}'(a';b';c')$ ne sont **pas colinéaires**, c'est-à-dire ne sont **pas proportionnels**.

Leur intersection est alors **une droite** dont on peut déterminer **la représentation paramétrique**.

Application 1

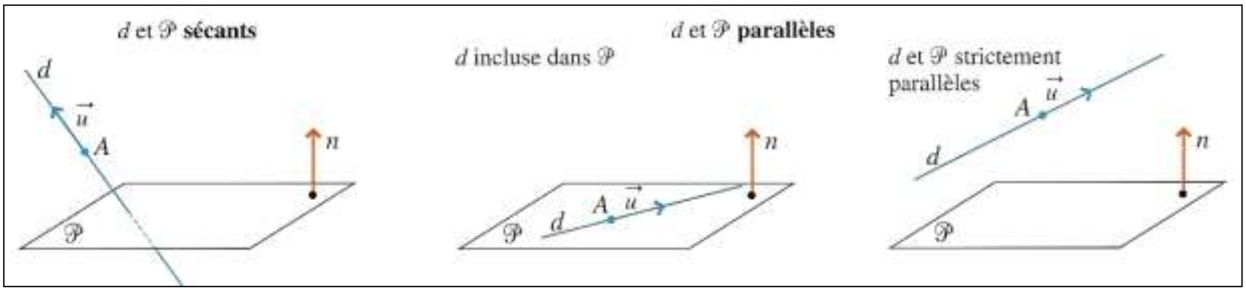
Dans un repère orthonormal de l'espace, on considère les plans $(\mathrm{P})\, x+y-z=1$ et $(\mathrm{P}')\, 3x+2y+z=4$. Etudier l'intersection des plans P et P' et montrer que c'est une droite. Déterminer une représentation paramétrique de cette droite.

Application 2

Même travail avec les plans $(\mathrm{P})\, x-y+z+3=0$ et $(\mathrm{P}')\, -x+2y-3z=0$.

Intersection d'une droite et d'un plan

Soit une droite d et un plan P. La droite d est soit **incluse** dans le plan P, soit **strictement parallèle** à P c'est-à-dire qu'ils n'ont aucun point en commun, soit **sécante** avec P, c'est-à-dire qu'ils ont un seul point commun. Ceci dépend de la position relative du vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite et du vecteur normal $\vec{n}$ du plan.



Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ **ne sont pas orthogonaux** alors la droite et le plan sont **sécants**. Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ **sont orthogonaux** alors : si un point de la droite appartient au plan alors la droite est **incluse** dans le plan, si un point de la droite n'appartient pas au plan alors la droite est **strictement parallèle** au plan.

Propriété

Le plan $(\mathrm{P})\, ax+by+cz+d=0$ et la droite $(d)\begin{cases} x = x_A + k\times\alpha \\ y = y_A + k\times\beta \\ z = z_A + k\times\gamma \end{cases}$ avec $k\in IR$ **sont sécants**

si et seulement si $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ **ne sont pas orthogonaux** c'est-à-dire si $\boxed{a\alpha+b\beta+c\gamma\neq 0}$.

Application 1

Déterminer l'intersection du plan P d'équation $2x+y-5z=1$ avec la droite (AB) où $A(1;-5;0)$ et $B(4;1;3)$.

Application 2

Déterminer l'intersection du plan P et de la droite d dans chacun des cas suivants :

- $(P)\, x+y-2z-5=0$, (d) passe par $A(1;0;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1;1;1)$.
- $(\mathrm{P})\, 3x-y+z+3=0$, (d) est la droite (AB) avec $A(1;1;-5)$ et $B(2;7;-2)$.
- $(\mathrm{P})\, x+y-z-1=0$, (d) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=3-t \\ y=5-t \\ z=2+t \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

Distance d'un point à une droite de l'espace

Partie A

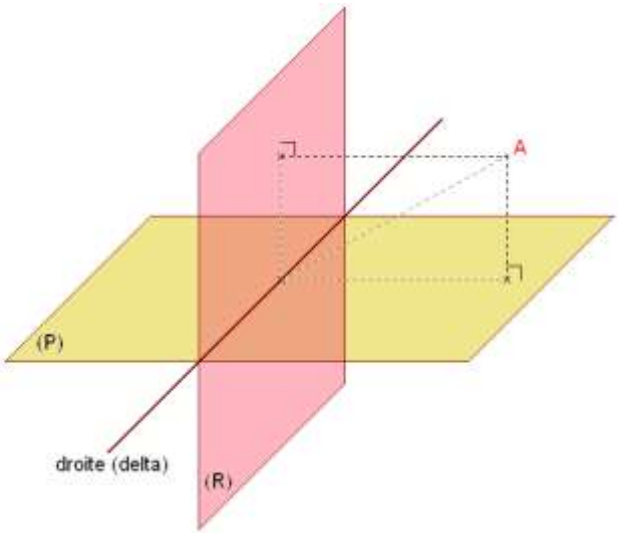
On considère le plan (P) passant par $B(1;-2;1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$ dont on déterminera une équation et le plan (R) d'équation $x+2y-7=0$. Démontrer que (P) et (R) sont perpendiculaires. Démontrer que l'intersection des plans (P) et (R) est la droite (Δ) passant par le point $C(1;3;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$. Déterminer une représentation paramétrique de cette droite.

Partie B

Soit le point $A(5;-2;-1)$. On appelle H le projeté orthogonal du point A sur le plan (P). On appelle K le projeté orthogonal du point A sur le plan (R).

Déterminer une représentation paramétrique de (AH), montrer que les coordonnées du point H sont $(3,8;-1,4;2)$ puis calculer la distance AH. (On trouvera $AH^2=10,8$).

Déterminer une représentation paramétrique de (AK), montrer que les coordonnées du point K sont $(6,2;0,4;-1)$ puis calculer la distance AK. (On trouvera $AK^2=7,2$).



En déduire, par une application simple du théorème de Pythagore la distance du point A à la droite (Δ). Cette distance entre un point et une droite de l'espace est définie comme la distance minimale qui existe entre le point A et l'ensemble des points de la droite (Δ).

Partie C

Soit, pour tout nombre réel t, le point M_t de coordonnées $(1+2t;3-t;t)$.
Déterminer, en fonction de t, la longueur AM_t. On note $\varphi(t)$ le carré de cette longueur

Etudier les variations de la fonction φ.
Préciser son minimum et interpréter géométriquement cette valeur.

Section plane d'un cube

On considère un cube ABCDEFCH donné en annexe 2 (à rendre avec la copie).
On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.

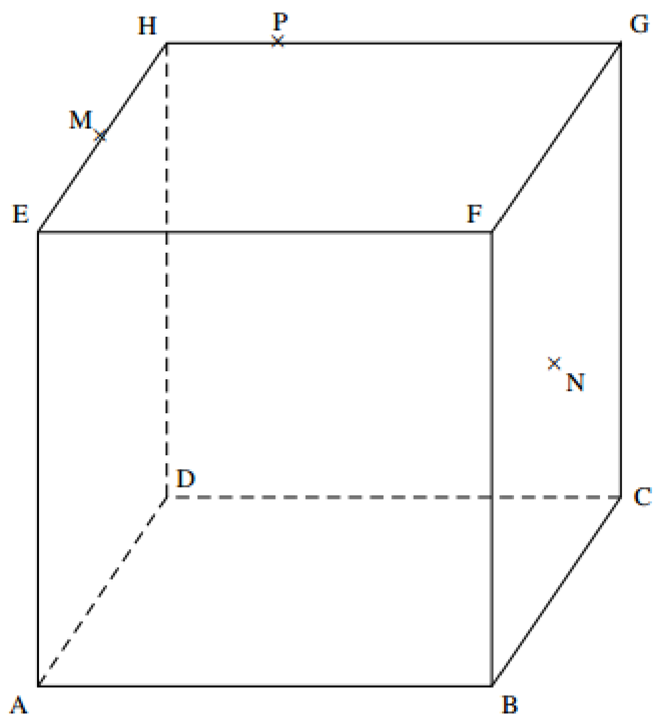
Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.
   Construire le point L
2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.
   On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
   2. a. Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
   2. b. Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).
3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).

Partie B

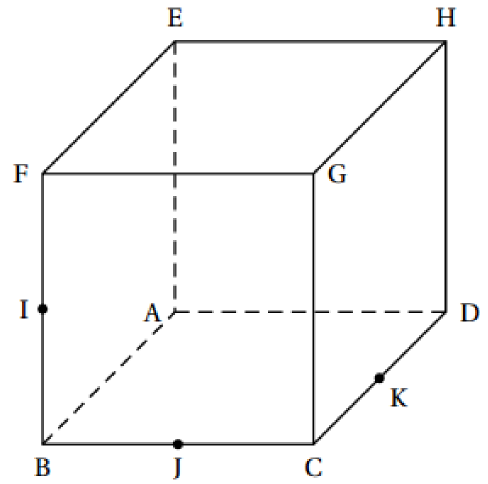
L'espace est rapporté au repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.
2. Déterminer les coordonnées du point L.
3. On admet que le point T a pour coordonnées $\left(1\ ;\ 1\ ;\ \frac{5}{8}\right)$.
   Le triangle TPN est-il rectangle en T ?



Section plane d'un cube – Encore

ABCDEFGH désigne un cube de côté 1.
Le point I est le milieu du segment [BF].
Le point J est le milieu du segment [BC].
Le point K est le milieu du segment [CD].



Partie A

Dans cette partie, on ne demande aucune justification

On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L.
Construire, sur la figure fournie en annexe et en laissant apparents les traits de construction :

- le point L;
- l'intersection $\mathscr{D}$ des plans (IJK) et (CDH);
- la section du cube par le plan (IJK).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées de A, G, I, J et K dans ce repère.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

3. On désigne par M un point du segment [AG] et t le réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AG}$.

a. Démontrer que $MI^2 = 3t^2 - 3t + \dfrac{5}{4}$.

b. Démontrer que la distance MI est minimale pour le point $N\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.

4. Démontrer que pour ce point $N\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$:

a. N appartient au plan (IJK).

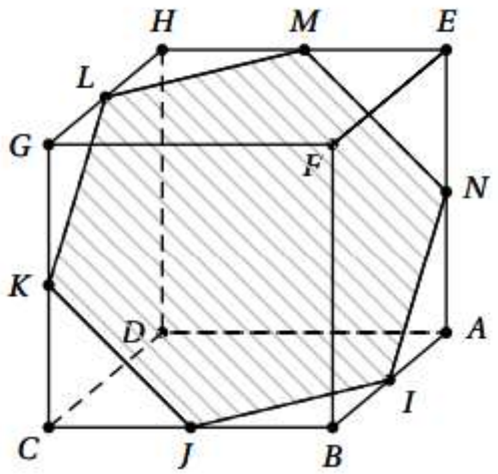
b. La droite (IN) est perpendiculaire aux droites (AG) et (BF).*

Cube et tétraèdre – Volumes

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête égale à 1.
L'espace est muni du repère orthonormé $(D\,; \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DH})$.

Dans ce repère, on a :
$D(0\,;\,0\,;\,0)$, $C(1\,;\,0\,;\,0)$, $A(0\,;\,1\,;\,0)$, $H(0\,;\,0\,;\,1)$ et $E(0\,;\,1\,;\,1)$.

Soit I le milieu de $[AB]$.



Soit $\mathscr{P}$ le plan parallèle au plan (BGE) et passant par le point I.

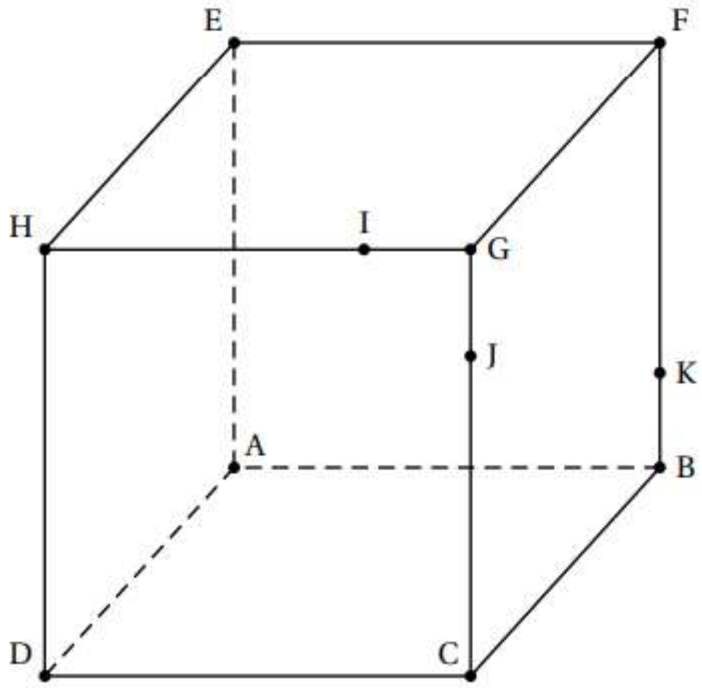
On admet que la section du cube par le plan $\mathscr{P}$ représentée ci-dessus est un hexagone dont les sommets I, J, K, L, M, et N appartiennent respectivement aux arêtes $[AB]$, $[BC]$, $[CG]$, $[GH]$, $[HE]$ et $[AE]$.

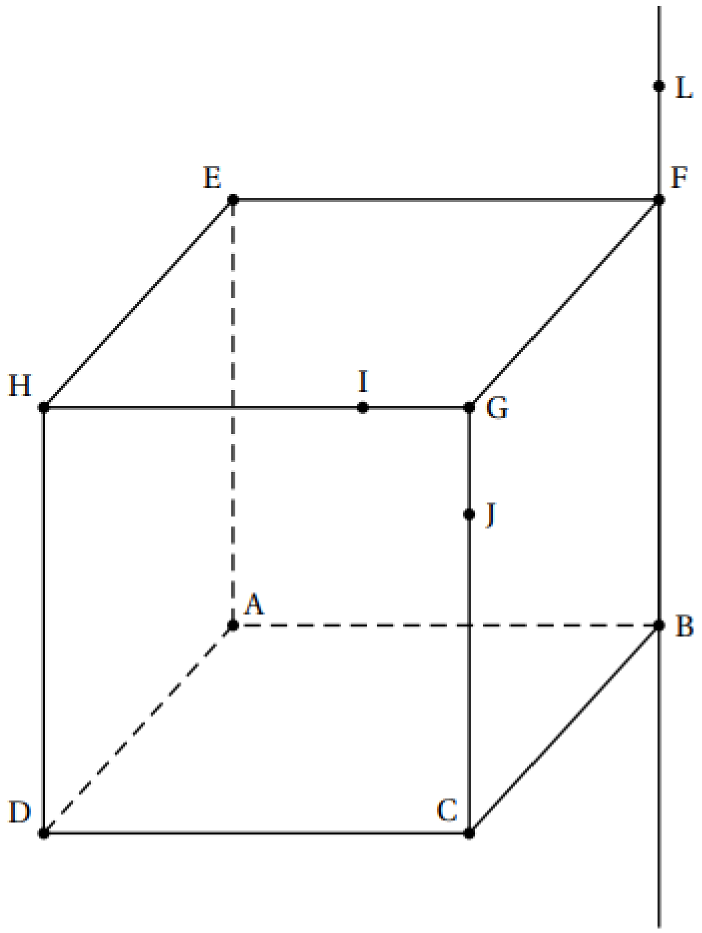
1. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est normal au plan (BGE).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.
2. Montrer que le point N est le milieu du segment $[AE]$.
3. **a.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HB).
   b. En déduire que la droite (HB) et le plan $\mathscr{P}$ son sécants en un point T dont on précisera les coordonnées.
4. Calculer, en unités de volume, le volume du tétraèdre $FBGE$.*

Sections planes – Le retour

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.
On définit les points I et J respectivement par $\overrightarrow{HI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{JG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CG}$.

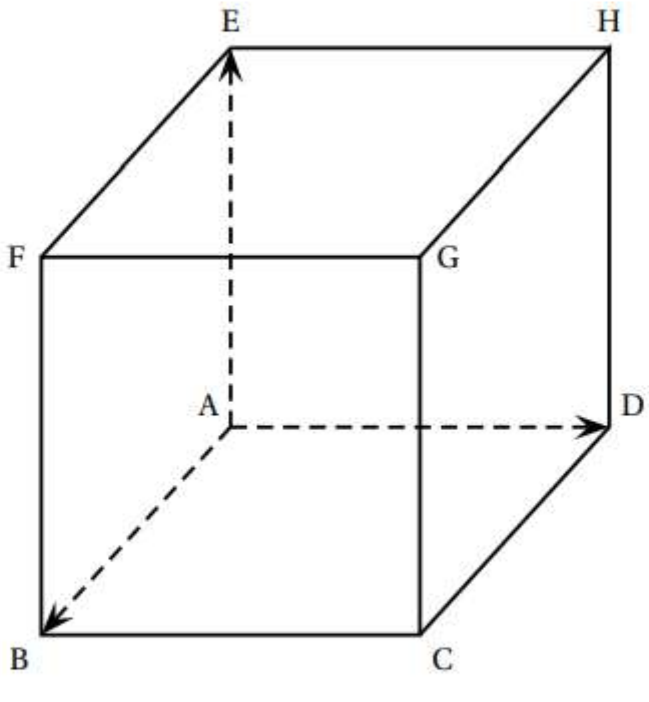
1. **Sur le document réponse donné en annexe, à rendre avec la copie**, tracer, sans justifier, la section du cube par le plan (IJK) où K est un point du segment [BF].
2. **Sur le document réponse donné en annexe, à rendre avec la copie**, tracer, sans justifier, la section du cube par le plan (IJL) où L est un point de la droite (BF).
3. Existe-t-il un point P de la droite (BF) tel que la section du cube par le plan (IJP) soit un triangle équilatéral ? Justifier votre réponse.*


E
F
H
I
G
J
K
A
B
D
C

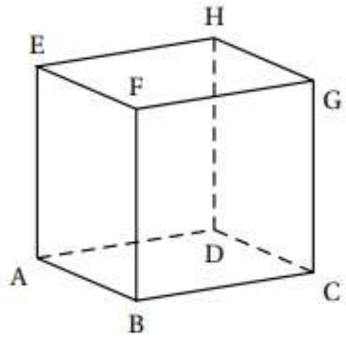

L
E
F
H
I
G
J
A
B
D
C

Section plane d'un cube – Toujours

On considère un cube ABCDEFGH fourni en annexe.
L'espace est rapporté au repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
On note $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z-1=0$.
Construire, sur la figure fournie en annexe, la section du cube par le plan $\mathscr{P}$.
La construction devra être justifiée par des calculs ou des arguments géométriques.*



Volume d'une pyramide



On considère un cube ABCDEFGH.

1. a. Simplifier le vecteur $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$.
   b. En déduire que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.
   c. On admet que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$.
   Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

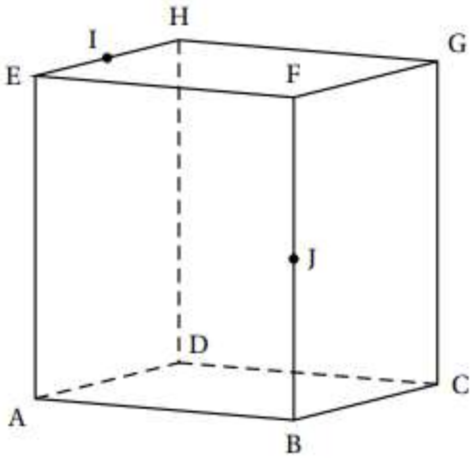
L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est $x+y+z-1=0$.

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de la droite (AG) et du plan (BDE).

c. On admet que l'aire, en unité d'aire, du triangle BDE est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Calculer le volume de la pyramide BDEG.

Longueurs, aires, volumes



Dans l'espace, on considère le cube ABCDEFGH représenté ci-contre.
On note I et J les milieux respectifs des segments [EH] et [FB].
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points I et J.

2. a. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BGI).
   b. En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).
   c. On note K le milieu du segment [HJ]. Le point K appartient-il au plan (BGI) ?

3. Le but de cette question est de calculer l'aire du triangle BGI.
   a. En utilisant par exemple le triangle FIG pour base, démontrer que le volume du tétraèdre FBIG est égal à $\dfrac{1}{6}$.
   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \dfrac{1}{3}B \times h$ *où B désigne l'aire d'une base et h la hauteur correspondante.*
   b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par F et orthogonale au plan (BGI).
   c. La droite Δ coupe le plan (BGI) en F′. Montrer que le point F′ a pour coordonnées $\left(\frac{7}{9}\,;\,\frac{4}{9}\,;\,\frac{5}{9}\right)$.
   d. Calculer la longueur FF′. En déduire l'aire du triangle BGI.

Section plane d'un tétraèdre

On considère un solide ADECBF constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré ABCD de centre I. Une représentation en perspective de ce solide est donnée **en annexe (à rendre avec la copie)**. Toutes les arêtes sont de longueur 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AK}\right)$.

1. **a)** Montrer que $IE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les coordonnées des points I, E et F.

   b) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE).

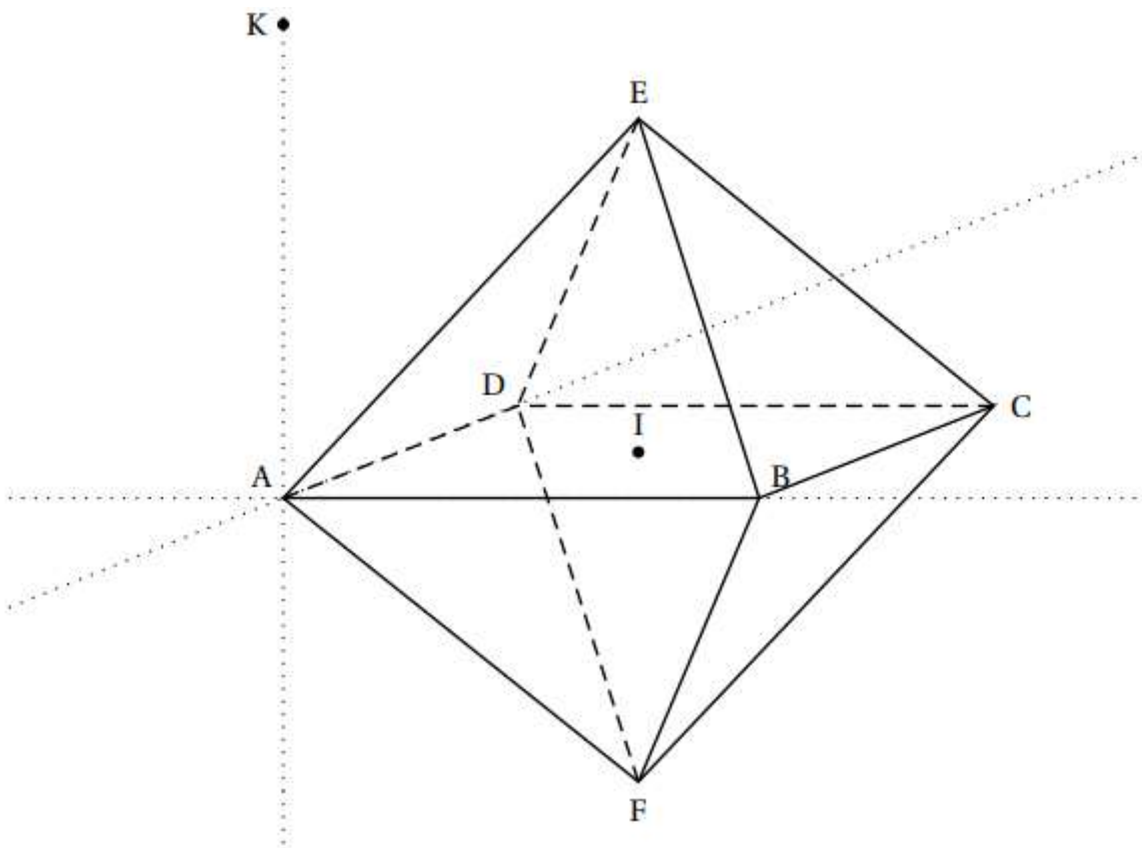
   c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABE).

2. On nomme M le milieu du segment [DF] et N celui du segment [AB].

   a) Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

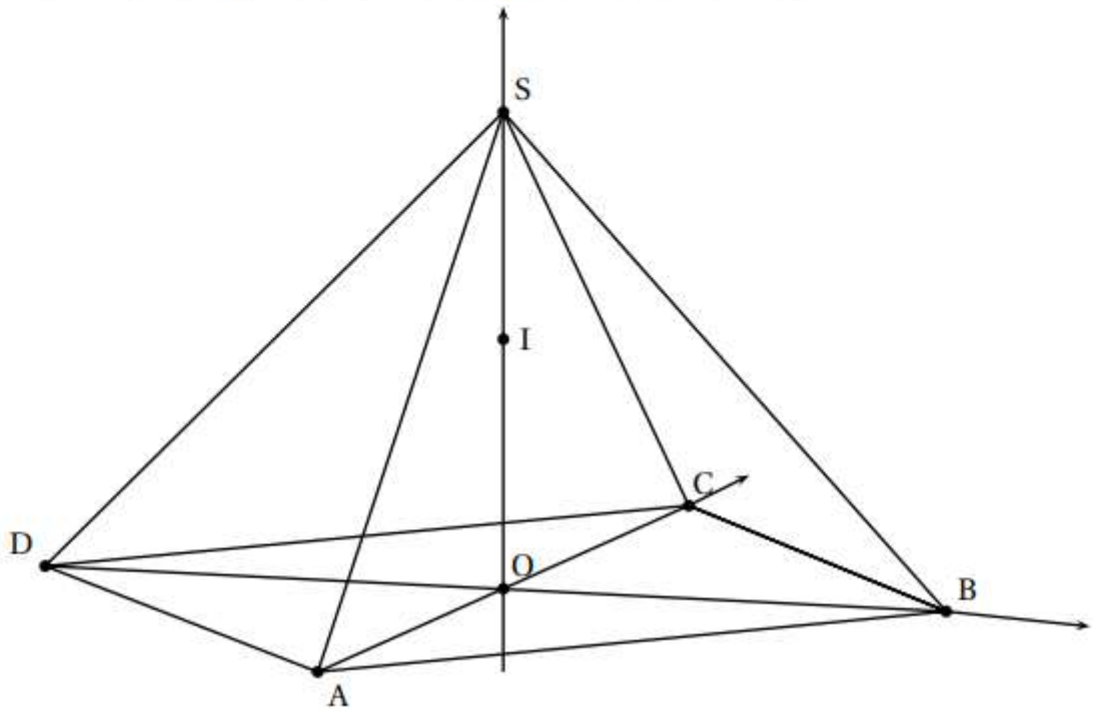
   b) Déterminer l'intersection des plans (EMN) et (FDC).

   c) Construire sur l'**annexe (à rendre avec la copie)** la section du solide ADECBF par le plan (EMN).



Etude d'une pyramide

On considère la pyramide régulière SABCD de sommet S constituée de la base carrée ABCD et de triangles équilatéraux représentée ci-dessous.



Le point O est le centre de la base ABCD avec OB = 1.
On rappelle que le segment [SO] est la hauteur de la pyramide et que toutes les arêtes ont la même longueur.

1. Justifier que le repère $\left(O ; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$ est orthonormé.

   Dans la suite de l'exercice, on se place dans le repère $\left(O ; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$.

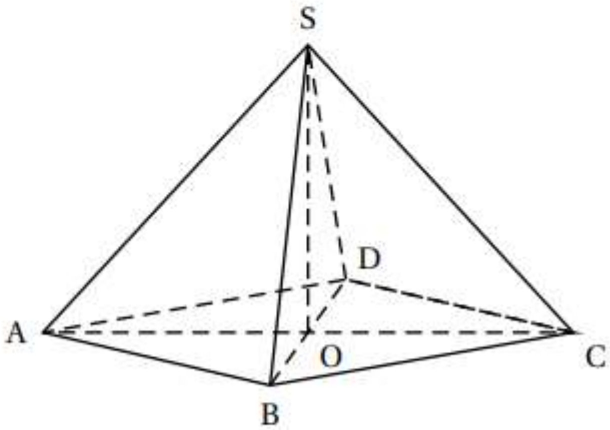
2. On définit le point K par la relation $\overrightarrow{SK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SD}$ et on note I le milieu du segment [SO].
   a. Déterminer les coordonnées du point K.
   b. En déduire que les points B, I et K sont alignés.
   c. On note L le point d'intersection de l'arête [SA] avec le plan (BCI).
   Justifier que les droites (AD) et (KL) sont parallèles.
   d. Déterminer les coordonnées du point L.

3. On considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ dans le repère $\left(O ; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$.
   a. Montrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BCI).
   b. Montrer que les vecteurs $\vec{n}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{DS}$ sont coplanaires.
   c. Quelle est la position relative des plans (BCI) et (SAD) ?*

Etude d'une autre pyramide

Partie A : un calcul de volume sans repère

On considère une pyramide équilatère SABCD (pyramide à base carrée dont toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux) représentée ci-contre.
Les diagonales du carré ABCD mesurent 24 cm. On note O le centre du carré ABCD.
On admettra que OS = OA.



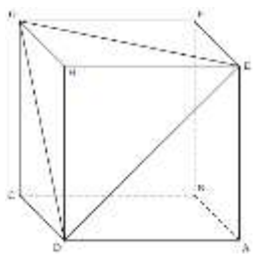
1. Sans utiliser de repère, démontrer que la droite (SO) est orthogonale au plan (ABC).
2. En déduire le volume, en cm^3, de la pyramide SABCD.

Partie B : dans un repère
On considère le repère orthonormé $\left(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OS}\right)$.

1. On note P et Q les milieux respectifs des segments [AS] et [BS].
   - **a.** Justifier que $\overrightarrow{n}\,(1 ; 1 ; -3)$ est un vecteur normal au plan (PQC).
   - **b.** En déduire une équation cartésienne du plan (PQC).
2. Soit H le point du plan (PQC) tel que la droite (SH) est orthogonale au plan (PQC).
   - **a.** Donner une représentation paramétrique de la droite (SH).
   - **b.** Calculer les coordonnées du point H.
   - **c.** Montrer alors que la longueur SH, en unité de longueur, est $\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$.
3. On admettra que l'aire du quadrilatère PQCD, en unité d'aire, est égale à $\dfrac{3\sqrt{11}}{8}$
   Calculer le volume de la pyramide SPQCD, en unité de volume.

Etude d'un simple cube

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.
On se place dans le repère orthonormé $\left(B ; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF}\right)$.



1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BH).
2. Démontrer que la droite (BH) est perpendiculaire au plan (DEG).

3. Déterminer une équation cartésienne du plan (DEG).
4. On note P le point d'intersection du plan (DEG) et de la droite (BH).
   Déduire des questions précédentes les coordonnées du point P.
5. Que représente le point P pour le triangle DEG? Justifier la réponse.*

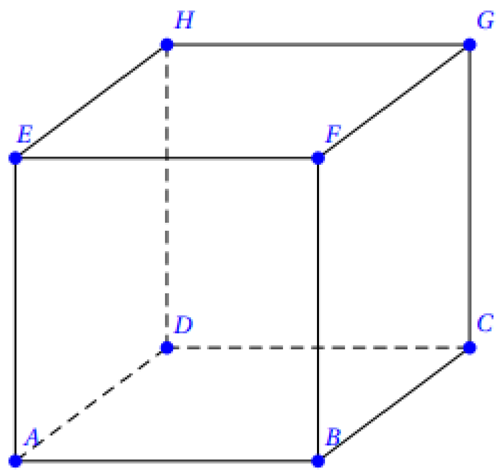
Tétraèdre et molécule

L'objectif est de déterminer une mesure de l'angle entre deux liaisons carbone- hydrogène.
Un tétraèdre régulier est un polyèdre dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.
Les interactions électriques conduisent à modéliser la molécule de méthane CH_4 de la façon suivante :

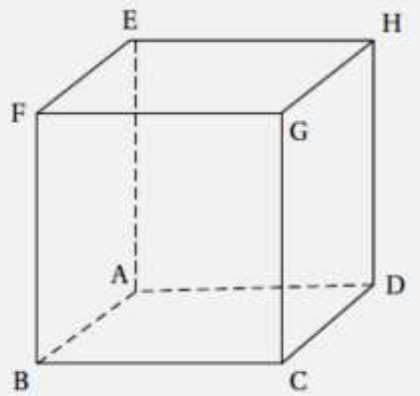
- Les noyaux d'atomes d'hydrogène occupent les positions des quatre sommets d'un tétraèdre régulier.
- Le noyau de carbone au centre de la molécule est à égale distance des quatre atomes d'hydrogène.

1. Justifier qu'on peut inscrire ce tétraèdre dans un cube ABCDEFGH en positionnant deux atomes d'hydrogène sur les sommets A et C du cube et les deux autres atomes d'hydrogène sur deux autres sommets du cube.
   Représenter la molécule dans le cube donné en annexe page 6.

   Dans la suite de l'exercice, on pourra travailler dans le repère $\left(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE}\right)$.
2. Démontrer que l'atome de carbone est au centre Ω du cube.
3. Déterminer l'arrondi au dixième de degré de la mesure de l'angle que forment entre elles les liaisons carbone-hydrogène, c'est-à-dire l'angle $\widehat{A\Omega C}$.



On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
On se place dans le repère orthonormal $\left(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE}\right)$.
On considère les points $I\left(1 ; \frac{1}{3} ; 0\right)$, $J\left(0 ; \frac{2}{3} ; 1\right)$, $K\left(\frac{3}{4} ; 0 ; 1\right)$ et $L(a ; 1 ; 0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$.



1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
2. Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

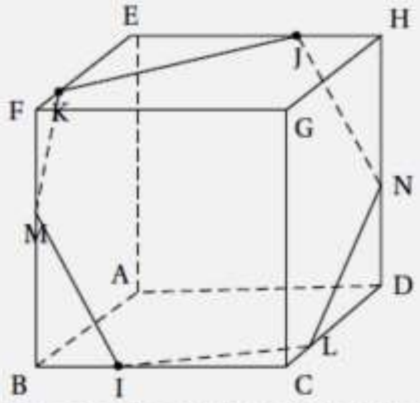
$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} + t'\left(a - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}, \ t' \in \mathbb{R}$$

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a = \frac{1}{4}$.

Dans la suite de l'exercice, on pose $a = \frac{1}{4}$.
Le point L a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4} ; 1 ; 0\right)$.

1. Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

2. La figure ci-dessous fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube ABCDEFGH telle qu'elle a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. .
   On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).



Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points M et N.

   a. Prouver que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(8 ; 9 ; 5)$ est un vecteur normal au plan (IJK).
   b. En déduire que le plan (IJK) a pour équation $8x + 9y + 5z - 11 = 0$.
   c. En déduire les coordonnées des points M et N

Dans l'espace, on considère un tétraèdre $ABCD$ dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ de l'espace.

1. On désigne par $\mathscr{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).
On note H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (DF).

- **a.** Donner les coordonnées des points D et F.
- **b.** Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).
- **c.** Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.
- **d.** Calculer les coordonnées du point H.
- **e.** Démontrer que l'angle $\widehat{EHG}$ est un angle droit.

2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{DM}=t\overrightarrow{DF}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$.
Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.

- **a.** Démontrer que $ME^2=\frac{3}{2}t^2-\frac{5}{2}t+\frac{5}{4}$.
- **b.** Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M.
  En déduire que $ME\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$.
- **c.** Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.
  En déduire que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.
- **d.** Conclure.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$, on considère le tétraèdre ABCD dont les sommets ont pour coordonnées :

$$A\left(1;-\sqrt{3};0\right);\ B\left(1;\sqrt{3};0\right);\ C(-2;0;0);\ D\left(0;0;2\sqrt{2}\right).$$

1. Démontrer que le plan (ABD) a pour équation cartésienne $4x+z\sqrt{2}=4$.

2. On note $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t\sqrt{2} \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

2. a. Démontrer que $\mathcal{D}$ est la droite qui est parallèle à (CD) et passe par O.

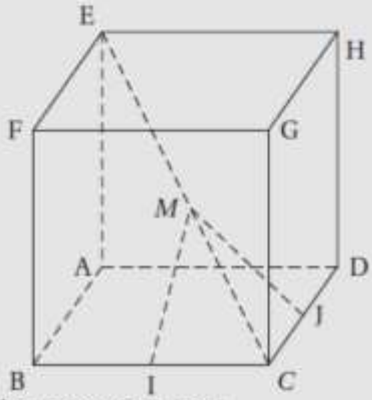
2. b. Déterminer les coordonnées du point G, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan (ABD).

3. **3. a.** On note L le milieu du segment [AC].
Démontrer que la droite (BL) passe par le point O et est orthogonale à la droite (AC).

3. b. Prouver que le triangle ABC est équilatéral et déterminer le centre de son cercle circonscrit.

4. Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier c'est-à -dire un tétraèdre dont les six arêtes ont la même longueur.

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH d'arête 1.
On désigne par I et J les milieux respectifs des arêtes [BC] et [CD].
Soit M un point quelconque du segment [CE].
Dans tout l'exercice, on se place dans le repère orthonormal $\left(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1. a. Donner, sans justification, les coordonnées des points C, E, I et J.
   b. Justifier l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$, tel que les coordonnées du point M soient $(1-t\,;1-t\,;t)$.
2. a. Démontrer que les points C et E appartiennent au plan médiateur du segment [IJ].
   b. En déduire que le triangle MIJ est un triangle isocèle en M.
   c. Exprimer IM^2 en fonction de t.
3. Le but de cette question est de déterminer la position du point M sur le segment [CE] pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ est maximale.
   On désigne par θ la mesure en radian de l'angle $\widehat{IMJ}$.
   a. En admettant que la mesure θ appartient à l'intervalle $[0\ ;\pi]$, démontrer que la mesure θ est maximale lorsque $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ est maximal.
   b. En déduire que la mesure est maximale lorsque la longueur IM est minimale.
   c. Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par :
   $$f(t)=3t^2-t+\frac{1}{4}.$$
   d. En déduire qu'il existe une unique position M_0 du point M sur le segment [EC] telle que la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ soit maximale.
   e. Démontrer que le point M_0 est le projeté orthogonal du point I sur le segment [EC].

Question 1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ de représentations paramétriques :

$$(\mathscr{D}_1)\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+2t \\ y &=& -3t \\ z &=& 1+t \end{array}\right. (t\in\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad (\mathscr{D}_2)\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-2t \\ y &=& 5-t \\ z &=& -2+t \end{array}\right. (t\in\mathbb{R}).$$

Affirmation :
Les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ sont orthogonales.

Question 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère le point A de coordonnées $(2\,;-1\,;3)$ et la droite $(\mathscr{D})$ de représentation paramétrique :

$$(\mathscr{D})\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+4t \\ y &=& -2+2t \\ z &=& 3-2t \end{array}\right. (t\in\mathbb{R}).$$

Affirmation :
Le plan $(\mathscr{P})$ contenant le point A et orthogonal à la droite $(\mathscr{D})$ a pour équation : $2x+y-z=0$.

On considère un cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1. On note I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).

1. On se place dans le repère $\left(D\ ;\ \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$.
   Dans ce repère, les sommets du cube ont pour coordonnées :

   $$A(1\ ;\ 0\ ;\ 0)\ B(1\ ;\ 1\ ;\ 0)\ C(0\ ;\ 1\ ;\ 0)\ D(0\ ;0\ ;\ 0)\ E(1\ ;0\ ;\ 1)\ F(1\ ;\ 1\ ;\ 1)\ C(0\ ;\ 1\ ;\ 1)\ H(0\ ;0\ ;\ 1)$$

   a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (AFH).

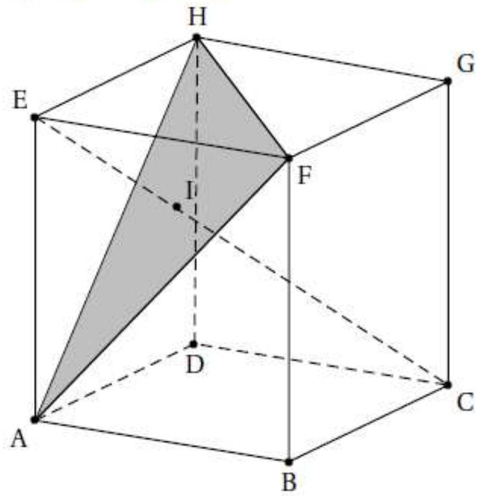
   c. En déduire les coordonnées du point I, puis montrer que le point I est le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH).

   d. Vérifier que la distance du point E au plan (AFH) est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

   e. Démontrer que la droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF).
   Que représente le point I pour le triangle AFH ?

2. *Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Définitions :
   - un tétraèdre est dit de type 1 si ses faces ont même aire ;
   - il est dit de type 2 si les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux ;
   - il est dit de type 3 s'il est à la fois de type 1 et de type 2.

   Préciser de quel(s) type(s) est le tétraèdre EAFH.



Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une dé monstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration pourra consister à fournir un contre-exemple.

1. La droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x &= t+2 \\ y &= -2t \\ z &= 3t-1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est parallèle au plan dont une équation cartésienne est : $x+2y+z-3=0$.
2. Les plans P, P', P'' d'équations respectives $x-2y+3z=3$, $2x+3y-2z=6$ et $4x-y+4z=12$ n'ont pas de point commun.
3. Les droites de représentations paramétriques respectives
   $\begin{cases} x &= 2-3t \\ y &= 1+t \\ z &= -3+2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et $\begin{cases} x &= 7+2u \\ y &= 2+2u \\ z &= -6-u \end{cases}$, $u \in \mathbb{R}$ sont sécantes.

Problème 1

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère le point A de coordonnées $(-1\,;\,-1\,;\,1)$ et les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ de représentations paramétriques :

$$\mathscr{D}\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t-1 \\ y & = & -3t+2 \\ z & = & t \end{array}\right. \text{ où } t \in \mathbb{R} \qquad \mathscr{D}'\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3t' \\ y & = & t'+2 \\ z & = & 3t'-2 \end{array}\right. \text{ où } t' \in \mathbb{R}$$

Proposition 1 : « Le point A appartient à la droite $\mathscr{D}$ ».
Proposition 2 : « Le plan perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}$ passant par le point O a pour équation : $2x-3y+z=0$ ».
Proposition 3 : « Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont orthogonales ».
Proposition 4 : « Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont coplanaires ».

Problème 2

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

On désigne par a, b, c, d quatre réels tels que le vecteur $\vec{n} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ soit différent du vecteur nul.
On appelle P le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$.
Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan P, c'est-à-dire que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points quelconques du plan P.

Partie B - Questionnaire à choix multiples

Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie ainsi que la justification de ce choix.
Il est attribué 1 point si la réponse est exacte et justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

On désigne par P le plan d'équation cartésienne $2x-y+3z=0$ et par A et B les deux points du plan P de coordonnées respectives $(1\,;2\,;0)$ et $(0\,;3\,;1)$.

1. Soient C, D, E les points de coordonnées respectives $(1\,;\,1\,;\,-1)$, $(-1\,;\,4\,;\,2)$, $(1\,;\,5\,;\,1)$.
   a. Les points A, B, C définissent le plan P.
   b. Les points A, B, D définissent le plan P.
   c. Les points A, B, E définissent le plan P.
2. La droite D est définie par la représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-t \\ y & = & t, \\ z & = & 2+t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$
   a. La droite D est perpendiculaire au plan P.
   b. La droite D est strictement parallèle au plan P.
   c. La droite D est incluse dans le plan P.