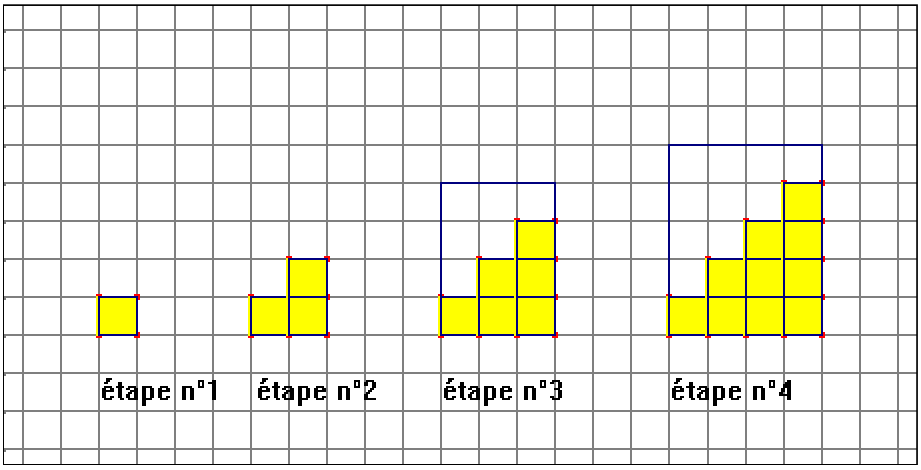
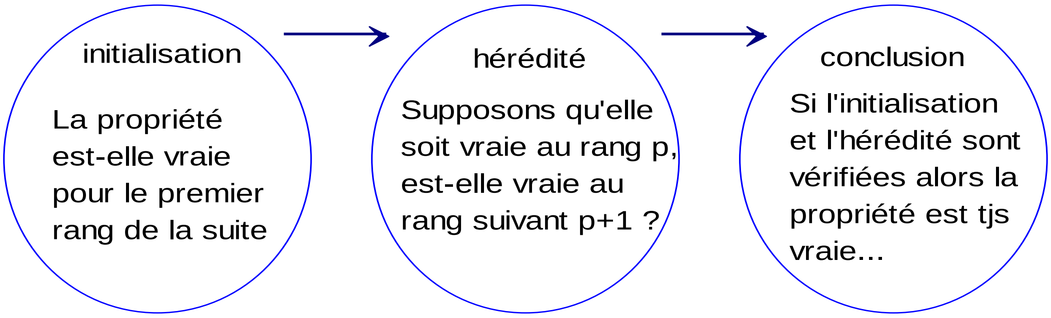
Nous définissons une **suite numérique** de la manière suivante :
« A chaque étape n, on associe, u_n le nombre de carrés nécessaires à la fabrication de l'escalier. »



Déterminer les nombres u_1, u_2, u_3, u_4, u_5. Que pensez-vous de l'affirmation $u_n = \dfrac{n\times(n+1)}{2}$?

Axiome de récurrence

Si une propriété est vraie au **premier rang** et si il est prouvé que **lorsqu'elle est vraie** au rang p **elle est vraie aussi** au rang **suivant** $p+1$, alors elle est **toujours vraie**, quelque soit le rang.



Raisonnement par récurrence

$\boxed{\text{Démontrons par récurrence que la relation } u_n = \dfrac{n\times(n+1)}{2} \text{ est vraie pour tout } n\geq 1.}$

1. Initialisation
   La propriété est-elle vraie pour $n=1$?

2. Hérédité

   Supposons que la propriété $u_p = \dfrac{p(p+1)}{2}$ soit vraie, est-elle est vraie au rang $p+1$?

3. Conclusion
   Conclure à l'aide de l'axiome de récurrence.

C'est au mathématicien italien **Giuseppe Peano** (1858 ; 1932) que l'on attribue le principe du raisonnement par récurrence. Le nom a été donné par Henri Poincaré (1854 ; 1912).

Principe du raisonnement par récurrence

On considère une file illimitée de dominos placés côte à côte.

La règle veut que lorsqu'un domino tombe, il fasse tomber le domino suivant et ceci à n'importe quel niveau de la file.

Alors, si le premier domino tombe, on est assuré que tous les dominos de la file tombent eux aussi.

Terme général d'une suite

On considère la suite définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ et $u_0 = 1$.

Démontrer par récurrence que : $u_n = (n+1)^2$ pour tout entier $n \geq 0$.

Somme des carrés

On pose $\sigma_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ avec $n \geq 1$ la somme des carrés des entiers consécutifs.

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$ on a $\sigma_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Somme des cubes

On pose $\theta_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$ avec $n \geq 1$ la somme des cubes des entiers consécutifs.

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$ on a $\theta_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Monotonie d'une suite définie par récurrence

On considère la suite définie pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}v_n + 2$ et $v_0 = 2$.

Démontrer par récurrence que la suite est croissante.

L'inégalité de Bernoulli

Soit un nombre réel a strictement positif.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $(1+a)^n \geq 1 + na$.

Attention l'initialisation est indispensable !

Démontrons par exemple que la propriété « 2^n est divisible par 3 » est héréditaire. Supposons qu'il existe un entier k tel que 2^k est divisible par 3. $2^{k+1} = 2^k \times 2 = 3p \times 2 = 6p$. Donc 2^{k+1} est divisible par 3. L'hérédité est vérifiée et pourtant la propriété n'est jamais vraie car non initialisée !

Exercice d'application 1

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n} \end{cases}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. On exprimera chacun de ces termes sous la forme irréductible.

2. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n on a $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Exercice d'application 2

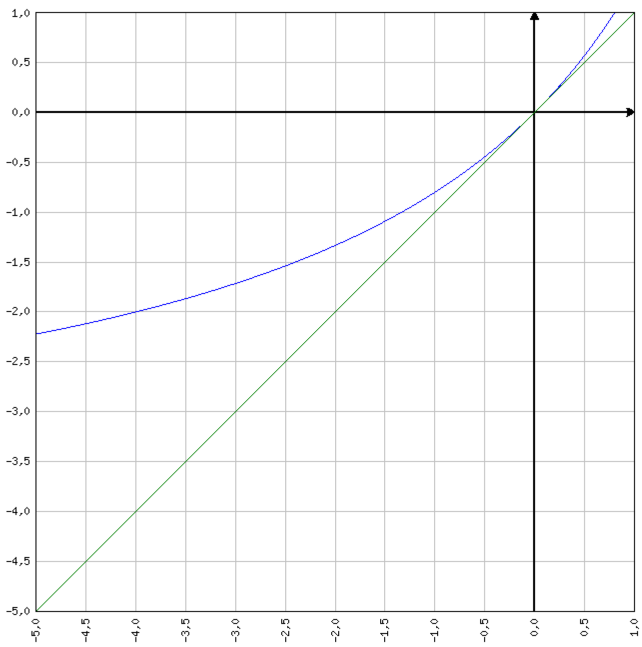
On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$.

1. Calculer v_1, v_2 et v_3. On exprimera chacun de ces termes sous la forme irréductible.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $v_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Représentation graphique d'une suite

On a tracé dans un repère la représentation graphique de $f(x) = \dfrac{4x}{4-x}$ et la droite d'équation $y = x$.



On considère la suite (u_n) définie par :

- $\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{4-u_n} \end{cases}$

et la suite auxiliaire (v_n) définie par :

- $v_n = \dfrac{3u_n + 2}{u_n}$.

1. Représenter graphiquement sur l'axe des abscisses les premiers termes u_0, u_1 et u_2.

2. Démontrer que (v_n) est **arithmétique**. Exprimer le terme général v_n en fonction de n.

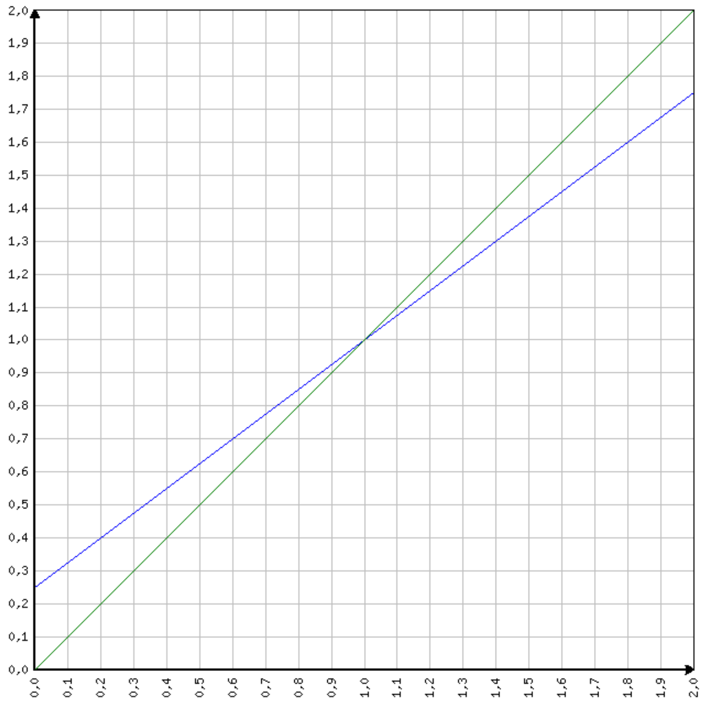
3. En déduire l'expression du terme général u_n en fonction de n. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Deux suites définies par récurrence

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $\boxed{\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4} \end{cases}}$ et $\boxed{\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{3}{4}v_n + \dfrac{1}{4} \end{cases}}$.

Premiers termes et représentation graphique

Calculer u_1, u_2 et u_3 d'une part et v_1, v_2 et v_3 d'autre part. Dans un repère construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3 et les points B_1, B_2, B_3 d'abscisses respectives v_1, v_2, v_3.



Deux suites auxiliaires

On considère la suite auxiliaire définie pour tout entier naturel n par $\boxed{s_n = u_n + v_n}$. Montrer par récurrence sur n que $s_n = 2$ quelque soit n.

On considère la suite auxiliaire définie pour tout entier naturel n par $\boxed{d_n = v_n - u_n}$. Démontrer que la suite (d_n) est **géométrique** et en déduire l'expression de d_n en fonction de n.

Expression du terme général

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n, puis l'expression de v_n en fonction de n. Montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) **convergent** vers une limite unique.

Luci d'artista – Torino

« Una sequenza di numeri, logicamente combinata dal matematico Leonardo Fibonnacci, crea una lunga stricia di luci rosse che di note brilla sulla cupola della Mole Antoniellana. Un'installazione concettuale brillantissima. »

Une courbe et une droite

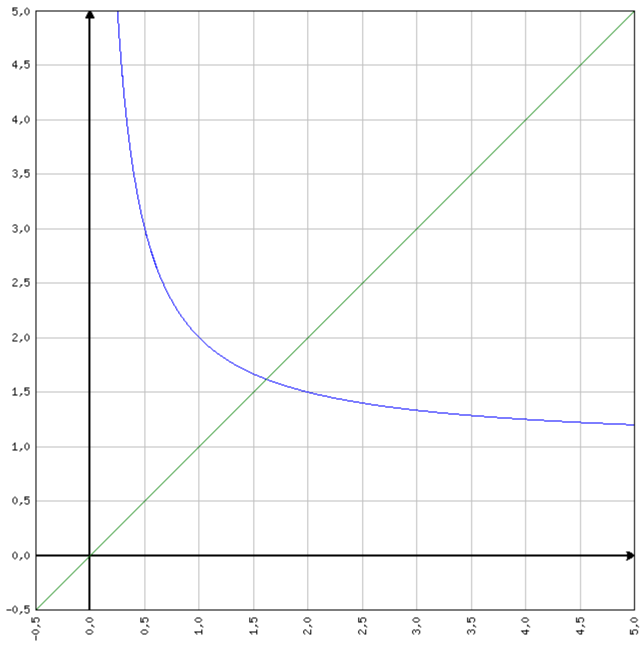
On considère la fonction f définie par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On a tracé dans un repère orthonormé la courbe (C) représentative de la fonction f ainsi que la droite (D) d'équation $y = x$. Résoudre algébriquement l'équation $1 + \dfrac{1}{x} = x$. On pourra se ramener à une équation du second degré. En déduire la valeur exacte de l'abscisse du point d'intersection de la courbe (C) et de la droite (D). Dans la suite de l'étude on notera ϕ cette valeur.

Une suite de nombres entiers

On considère la suite (v_n) définie pour par $\begin{cases} v_0 = v_1 = 1 \\ v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \end{cases}$. Déterminer les douze premiers termes de la suite.

Une suite de quotients

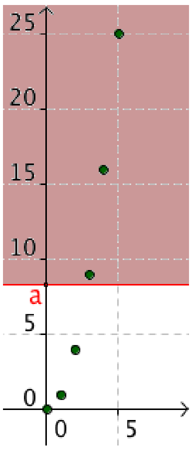
On considère la suite (w_n) définie par $w_n = \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Calculer les onze premiers termes. Démontrer que $w_{n+1} = 1 + \frac{1}{w_n}$.



Représentation graphique

Représenter les premiers termes de la suite (w_n) puis conjecturer graphiquement son comportement asymptotique. Déterminer une valeur approchée du nombre ϕ.

Limite infinie d'une suite



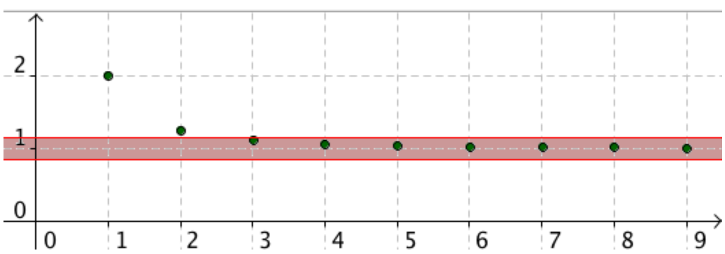
La suite définie par $u_n = n^2$ a pour limite $+\infty$. En effet, les termes de la suite deviennent aussi grands que l'on souhaite à partir d'un certain rang. Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On dit que la suite diverge vers $+\infty$.

Définition et notation

La suite (u_n) admet pour limite $+\infty$ si tout intervalle $]a;+\infty[$, a réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Limite finie d'une suite

La suite par $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ a pour limite 1. En effet, les termes de la suite se resserrent autour de la valeur 1 à partir d'un certain rang.

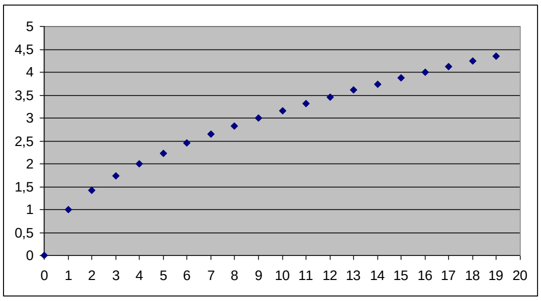


Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant la valeur 1, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang. On dit que la suite converge vers 1.

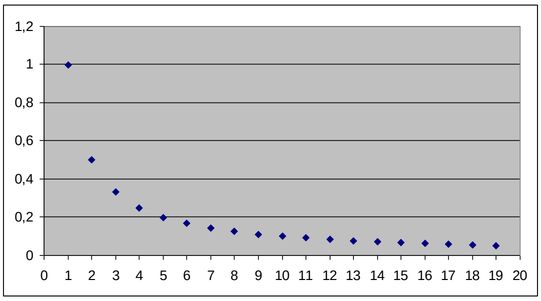
Définition et notation :

La suite (u_n) admet pour limite L si tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$. Une telle suite est dite **convergente**. Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

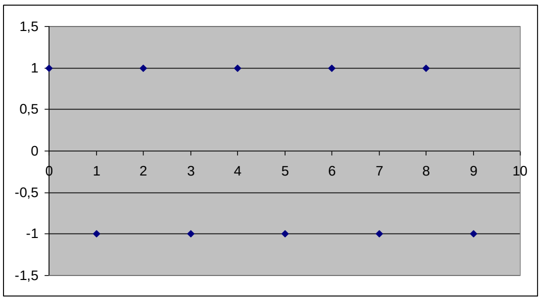
Comportement asymptotique d'une suite



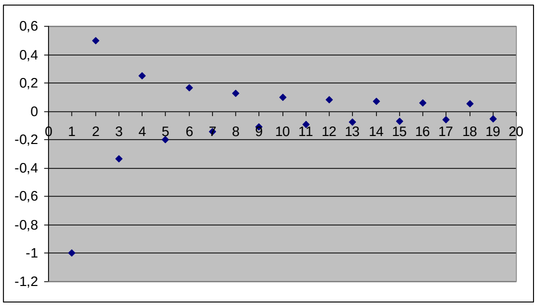
Suite 1



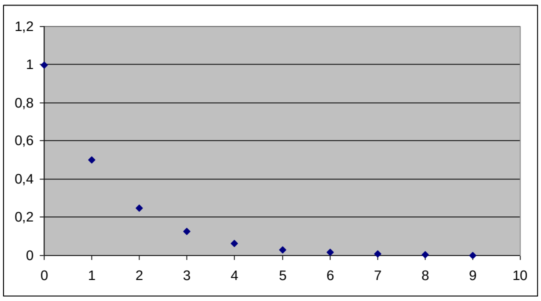
Suite 2



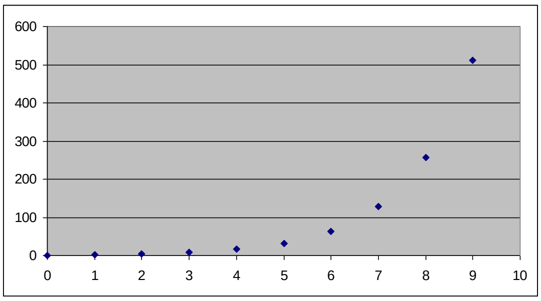
Suite 3



Suite 4



Suite 5



Suite 6

1. Pour chaque suite, déterminer à quelle expression du terme général elle correspond :

$$u_n = \sqrt{n} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad w_n = \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \qquad x_n = \frac{1}{n} \qquad y_n = (-1)^n \qquad z_n = 2^n$$

2. Pour chaque suite, déterminer si « la suite diverge » ou si « la suite converge ».

3. Pour chaque suite, déterminer quelle limite on peut lui attribuer.

4. Pour chaque suite, choisir l'une ou l'autre de ces affirmations : « la suite est croissante », « la suite est décroissante », « la suite est ni croissante, ni décroissante elle est alternée ».

Problématique

Connaissant le comportement asymptotique de deux suites (u_n) et (v_n), certaines questions naturelles se posent : quel est le comportement asymptotique de la **somme** des deux suites $\sigma_n = u_n + v_n$? Du **produit** des deux suites $\theta = u_n \times v_n$? Du **quotient** des deux suites $\omega_n = \frac{u_n}{v_n}$?

Les **théorèmes sur les limites** (à apprendre) apportent, dans certains cas, une réponse.

D'autres cas, appelés **cas d'indétermination** (à connaître) nécessitent une étude plus fine.

La somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) =$	L + L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

Déterminer la limite des suites définies par $\alpha_n = 2 + \frac{1}{n}$, $\beta_n = \frac{1}{n^2} - 1$, $\gamma_n = \sqrt{n} + n^2$ et $\delta_n = 3 - n^2$.

Le produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L > 0	L < 0	L > 0	L < 0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n v_n) =$	L L'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

Déterminer la limite des suites définies par $a_n = \alpha_n \times \beta_n$, $b_n = \beta_n \times \gamma_n$, $c_n = \gamma_n \times \delta_n$, $d_n = \beta_n \times \delta_n$

Le quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	L	L	L > 0 ou $+\infty$	L < 0 ou $-\infty$	L > 0 ou $+\infty$	L < 0 ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	L' ≠ 0	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $v_n > 0$	0 avec $v_n > 0$	0 avec $v_n < 0$	0 avec $v_n < 0$	0	L' > 0	L' < 0	L' > 0	L' < 0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Déterminer la limite des suites définies par $a_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n}$, $b_n = \frac{\alpha_n}{\gamma_n}$, $c_n = \frac{\alpha_n}{\delta_n}$, $d_n = \frac{\gamma_n}{\alpha_n}$, $e_n = \frac{\gamma_n}{\beta_n}$.

Lever une indétermination

On considère la suite définie par $u_n = n - n^2$.

Rappeler $\lim_{n\to+\infty} n$ et $\lim_{n\to+\infty} n^2$. Conjecturer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

On considère la suite définie par $v_n = n^2 - n$.

Rappeler $\lim_{n\to+\infty} n^2$ et $\lim_{n\to+\infty} n$. Conjecturer $\lim_{n\to+\infty} v_n$

- En déduire pourquoi il n'existe pas de théorème donnant le résultat du calcul $(\infty)-(\infty)$.

- Montrer que $u_n = -n^2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$
- Par application des règles sur le produit des limites, calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

- Montrer que $v_n = n^2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$
- Par application des règles sur le produit des limites, calculer $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice d'application directe

Déterminer la limite de la suite définie par $w_n = n - 3\sqrt{n}$.

Lever une autre indétermination

On considère la suite définie par $u_n = \dfrac{n+1}{n^2+1}$.

Rappeler $\lim_{n\to+\infty} n+1$. Rappeler $\lim_{n\to+\infty} n^2+1$.

Conjecturer à l'aide d'un tableur $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

On considère la suite définie par $v_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$.

Rappeler $\lim_{n\to+\infty} n+1$. Rappeler $\lim_{n\to+\infty} n^2+1$.

Conjecturer à l'aide d'un tableur $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

- En déduire pourquoi il n'existe pas de théorème donnant le résultat du calcul $\dfrac{(\infty)}{(\infty)}$.

- Montrer que $u_n = \dfrac{1}{n}\times\dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{1+\dfrac{1}{n^2}}$.
- Par application des règles sur le produit et quotient des limites, calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

- Montrer que $v_n = n\times\dfrac{1+\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}}$.
- Par application des règles sur le produit et quotient des limites, calculer $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

Exercices d'application directe

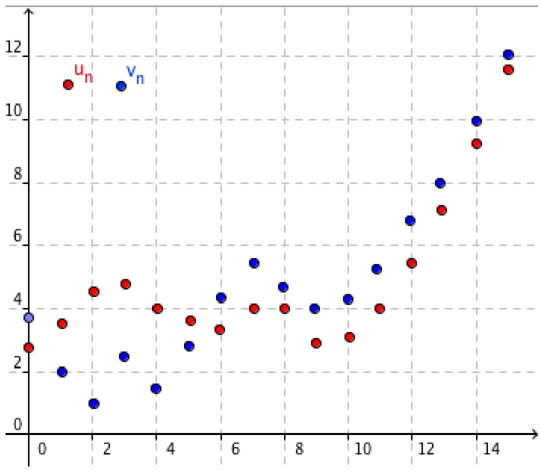
- Conjecturer à l'aide d'un tableur puis déterminer $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{3n+5}{4n+3}$, $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2+3n}{5n+7}$.
- Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$. Préciser votre raisonnement.
- Déterminer $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-n}\right)$. Préciser votre raisonnement.

Théorème de comparaison

Si les suites (u_n) et (v_n) vérifient les conditions :

- à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$,
- et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$,

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.



On peut dire que la suite (u_n) pousse la suite (v_n) vers $+\infty$ à partir d'un certain rang. Ici.

Démonstration du théorème de comparaison

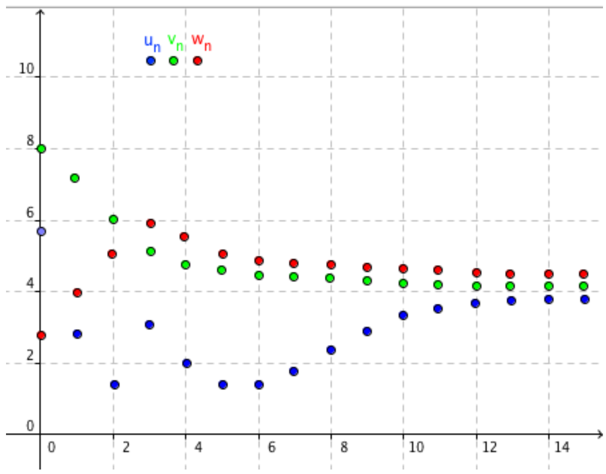
Proposer une démonstration du théorème. Proposer une variante du théorème de comparaison.

Théorème des gendarmes

Si les trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) vérifient les conditions suivantes :

- à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$,
- et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = L$,

Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L$.



On peut dire que les deux suites (u_n) et (w_n) (les gendarmes) se resserrent autour de la suite (w_n) pour la « conduire » vers la même limite. Ici.

Démonstration du théorème des gendarmes

Proposer une démonstration du théorème.

Exercices d'application directe

1. Etudier la convergence de la suite définie par $u_n = n^2 + (-1)^n$.
2. Etudier la convergence de la suite définie par $v_n = \sin(n) - n$.

Exercices d'application directe

3. Etudier la convergence de la suite définie par $u_n = \dfrac{n + \sin(n)}{n^2 + 1}$.
4. Etudier la convergence de la suite définie par $v_n = \dfrac{n + \sin(n)}{n - \sin(n)}$ pour $n \geq 1$.

Rappels sur les suites géométriques

On considère les suites définies par $u_n = q^n$ où q est un nombre réel quelconque. Le but est de récapituler dans le tableau suivant le comportement d'un tel type de suite en fonction des valeurs de q. La première ligne sera remplie avec les valeurs « 0 ; -1 ; 1 ; $-\infty$ et $+\infty$ ». La seconde ligne sera remplie avec les valeurs « 0 ; $+\infty$; pas une limite mais deux : $\pm\infty$ ». La troisième ligne sera remplie avec les qualificatifs « convergente ; divergente ». La quatrième ligne sera remplie avec les qualificatifs « croissante ; décroissante ; alternée »

q				
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n$				
Comportement asymptotique				
Sens de variation				

Démonstration

Démontrer que toute suite géométrique de raison strictement supérieure à 1 diverge vers $\pm\infty$.

Exercices d'application directe

Déterminer la limite de chacune des suites proposées :

$u_n = 1000 \times 2^n$ $\quad v_n = 100 \times 0,9^n$ $\quad w_n = -3 \times \left(\sqrt{2}\right)^n$ $\quad z_n = 5 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

$x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2$ $\quad y_n = -3 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\quad s_n = 2^n - 3^n$ $\quad t_n = \frac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n}$

Vocabulaire

- La suite (u_n) est **majorée** par M si et seulement si $u_n \leq M$ pour tout n.
- La suite (u_n) est **minorée** par m si et seulement si $u_n \geq m$ pour tout n.
- Le suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée **et** minorée.

Exemples

$u_n = (-1)^n$ $\quad v_n = \sin(n)$ $\quad w_n = n^2$ $\quad z_n = 1 - \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$

Exercices d'application directe

- Démontrer que la suite défini par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$ est majorée par 3.
- Démontrer que la suite définie par $v_{n+1} = 4 - \frac{3}{v_n}$ et $v_0 = 2$ est bornée par 2 et 3.

Vocabulaire

- La suite (u_n) est **croissante** si et seulement si $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout n.
- La suite (u_n) est **décroissante** si et seulement si $u_n \geq u_{n+1}$ pour tout n.
- La suite (u_n) est **monotone** si elle est exclusivement croissante **ou** décroissante.

Rappel important

- Pour étudier la monotonie d'une suite, on peut étudier le signe de la quantité $u_{n+1} - u_n$.
- Pour étudier la monotonie d'une suite, on peut parfois comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

Convergence des suites monotones

Si (u_n) est une suite croissante et si $\lim_{n \to +\infty} u_n = L$ alors la suite (u_n) est majorée par L.

Démonstration

Proposer une démonstration par l'absurde de cette propriété. Proposer une variante analogue.

Théorèmes de convergence monotone

Si une suite est **croissante et majorée**, alors elle est **convergente**.
Si une suite est **décroissante et minorée**, alors elle est **convergente**.

Démonstration

Ces deux théorèmes sont admis.

Exercice d'application directe 1

- Démontrer que la suite défini par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$ converge.
- Préciser sa limite.

Exercice d'application directe 2

- Démontrer que la suite définie par $v_{n+1} = 4 - \frac{3}{v_n}$ et $v_0 = 2$ converge.
- Préciser sa limite.

Exercice d'application directe 3

- Démontrer que la suite définie par $w_{n+1} = \frac{1}{2}\left(w_n + \frac{9}{w_n}\right)$ et $w_0 = 4$ converge.
- Préciser sa limite.

Corollaires des théorèmes de convergence monotone

Si une suite **croissante** est **non majorée** alors elle tend vers $+\infty$.
Si une suite **décroissante** est **non minorée** alors elle tend vers $-\infty$.

Démonstration

Proposer une démonstration de ces deux corollaires.

Le tableur au service de l'étude d'une suite

Un éditeur veut faire paraître un nouveau magazine. Ce magazine sera rentable pour lui si le nombre d'abonnés reste supérieur ou égal à 3000 personnes. Il réalise une étude de marché qui révèle que le nombre d'abonnés serait de 8000 la première année, que le taux de réabonnement serait de 80% et que chaque année il y aurait 600 nouveaux abonnés.

On note a_n le nombre d'abonnés de l'année n. On pose $a_0 = 8000$.

Représenter graphiquement à l'aide du tableur le comportement de ce nombre d'abonnés au fur et à mesure que les années s'écoulent. Le magazine semble-t-il pérenne dans le temps ?

L'algorithmique au service de l'étude d'une suite

On considère l'algorithme proposé ci-contre.

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  m EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE m
  a PREND_LA_VALEUR 8000
  n PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (a>m) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    n PREND_LA_VALEUR n+1
    a PREND_LA_VALEUR 0.8*a+600
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER n
FIN_ALGORITHME
```

Quel est l'intérêt de cet algorithme ?

Programmer cet algorithme sur logiciel ou calculatrice et tester le programme avec différentes valeurs de m de plus en plus proche de la valeur 3000. Que remarque-t-on ?

Complétez la conjecture suivante : « 3000 semble être le plus … des … de la suite a_n »

Analyse mathématique de la suite

On définit le suite auxiliaire (b_n) de la façon suivante : $b_n = a_n - 3000$ pour tout n entier positif.

1. Démontrer que la suite (b_n) est géométrique, préciser les éléments caractéristiques de cette suite et déterminer l'expression de son terme général.

2. En déduire l'expression du terme général de la suite (a_n).

3. Démontrer que la suite (a_n) est strictement décroissante et qu'elle est minorée par 3000.

4. La suite (a_n) peut-elle atteindre la valeur 3000. Justifier votre affirmation.
   Pourquoi le tableur affiche-t-il pour autant 3000 à partir d'un certain rang ? Ici.