Polynôme à coefficients réels

Définitions : soit n un entier naturel et a_0, a_1, … a_n des nombres réels tels que $a_n \neq 0$. On appelle fonction polynôme de degré n à coefficients réels (ou plus simplement polynôme de degré n) la fonction P définie sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$.

Equation polynomiale et racine d'un polynôme

Définition : l'équation $P(z)=0$ est appelée équation polynomiale de degré n. On appelle racine d'un polynôme P tout complexe z_0 tel que $P(z_0)=0$.

Factorisation par z-a

Définition : on dit qu'un polynôme P est factorisable (ou divisible) par $z-a$ s'il existe un polynôme Q tel que $P(z)=(z-a)Q(z)$.

Trois propriétés importantes

Propriété 1 : soit a un nombre complexe. Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $z^n - a^n$ est factorisable par $z-a$. En effet $z^n - a^n = (z-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}$ c'est à dire $z^n - a^n = (z-a)\left(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \ldots + a^{n-2} z + a^{n-1}\right)$.

Propriété 2 : le polynôme P est factorisable par $z-a$ si et seulement si a est une racine de P.

Propriété 3 : pour tout entier naturel $n \geq 1$, un polynome de degré n admet au plus n racines.

Démonstration de la première propriété

Développer $z^n - a^n = (z-a)\left(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \ldots + a^{n-2} z + a^{n-1}\right)$ et conclure.

Démonstration de la deuxième propriété

Implication directe : en utilisant l'une des trois définitions, expliquer pourquoi « si le polynôme P est factorisable par $z-a$ alors a est une racine de P ».

Implication réciproque : on souhaite démontrer que « si a est une racine de P alors le polynôme P est factorisable par $z-a$ ». Pour cela on prend un polynôme P défini par $P(z)=\sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$. On sait que $P(a)=\sum_{k=0}^{n} \alpha_k a^k = 0$. Par conséquent $P(z)=P(z)-P(a)=\sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k a^k$ et donc $P(z)=\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \left(z^k - a^k\right)$. En utilisant la première propriété, expliquer pourquoi et comment $P(z)$ est factorisable par $z-a$. Conclure.

Démonstration de la troisième propriété

La démonstration se fait par récurrence sur le degré du polynôme. On reformule la propriété de la façon suivante : « L'équation $P(z)=0$ où P est une fonction polynôme de degré n a un nombre de solutions inférieur ou égal à n ».

<u>Initialisation :</u> l'équation $\alpha z+\beta=0$ admet si $\alpha\neq 0$ une racine évidente $z=-\dfrac{\beta}{\alpha}$. Que peut-on en conclure ?

<u>Hérédité :</u> on suppose la propriété vraie au rang p et on démontre qu'elle est vraie au rang $p+1$ c'est-à-dire que « L'équation $P(z)=0$ où P est une fonction polynôme de degré $p+1$ a un nombre de solutions inférieur ou égal à $p+1$ ». Pour cela on procède par disjonction de cas.

- Si P n'a pas de racine, alors la conclusion est évidente puisque $P(z)=0$ a forcément un nombre de solutions inférieur ou égal à $p+1$,
- Si P admet au moins une racine que l'on notera a, alors P est factorisable par $z-a$ et s'écrit $P(z)=(z-a)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré p. On en déduit que l'équation $P(z)=0$ est équivalente à $z-a=0$ (qui permet de comptabiliser une solution) ou $Q(z)=0$ (qui permet de comptabiliser au plus p solutions d'après l'hypothèse de récurrence) admet un nombre de solutions inférieur ou égal à $p+1$.

Factorisation par la méthode des coefficients indéterminés

On considère le polynôme P défini par $P(z)=z^4-4z^2-z+2$. Nous abordons la problématique suivante : « Montrer que 2 est une racine de P et en déduire une factorisation de P » en procédant par la méthode des coefficients indéterminés détaillée ci-dessous :

- 2 est une racine de P donc $P(z)=(z-2)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré 3 c'est-à-dire $P(z)=(z-2)\left(az^3+bz^2+cz+d\right)$,
- Après développement on obtient $P(z)=az^4+(b-2a)z^3+(c-2b)z^2+(d-2c)z-2d$,
- On procède par identification pour obtenir le système $\begin{cases} a=1 \\ b-2a=0 \\ c-2b=-4 \\ d-2c=-1 \\ -2d=2 \end{cases}$,
- Que l'on résout pour obtenir les valeurs $a=1$, $b=2$, $c=0$ et $d=-1$ et conclure quant à la factorisation du polynôme $P(z)=(z-2)\left(z^3+2z^2-1\right)$.

Factorisation par la méthode de la division

On considère le polynôme P défini par $P(z)=z^4-4z^2-z+2$. Nous abordons la même problématique : « Montrer que 2 est une racine de P et en déduire une factorisation de P » en procédant par la méthode de la division détaillée ci-contre.

Le raisonnement s'initie de la même manière : 2 est une racine de P donc $P(z)=(z-2)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré 3.

$P(z)$	z^4-4z^2-z+2	$z-2$
$z^3\times(z-2)$	z^4-2z^3	z^3+2z^2-1
$P_1(z)=P(z)-z^3(z-2)$	$2z^3-4z^2-z+2$	
$2z^2\times(z-2)$	$2z^3-4z^2$	
$P_2(z)=P_1(z)-2z^2(z-2)$	$-z+2$	
$(-1)\times(z-2)$	$-z+2$	
$P_2(z)-(-1)(z-2)$	0	

Puis, en observant le terme de plus haut degré du polynôme P on en déduit que $P(z)=(z-2)z^3+R(z)$ où R est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. En développant on obtient $P(z)-(z-2)z^3=R(z)$ c'est-à-dire $2z^3-4z^2-z+2=R(z)$. En observant le terme de plus haut degré on en déduit que $R(z)=(z-2)2z^2+S(z)$ où S est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1. En développant on obtient $R(z)-(z-2)2z^2=S(z)$ c'est-à-dire $-z+2=S(z)$. En observant le terme de plus haut degré on en déduit que $S(z)=(z-2)\times(-1)+T(z)$ où S est un polynôme de degré inférieur ou égal à 0. En développant on obtient $S(z)-(z-2)\times(-1)=T(z)$ c'est-à-dire $0=T(z)$. On en conclut que $P(z)=z^4-4z^2-z+2=(z-2)(z^3+2z^2-1)$.

Afin de simplifier les calculs, on peut adopter une disposition analogue à celle de la division euclidienne de deux nombres entiers : voir l'image proposée ci-dessus.