Simplification d'une expression littérale

- Convention d'écriture : pour simplifier l'écriture d'une expression littérale, on peut supprimer le symbole devant une lettre ou devant une parenthèse.

- Rappels : pour tout nombre a, on peut écrire $a \times a = a^2$ qui se lit « a au carré », on peut écrire également $a \times a \times a = a^3$ qui se lit « a au cube ».

Exemple : Simplifie l'expression suivante : A = – 5 × x + 7 × (– 4) × (3 × x – 2).

A = – 5 × x + 7 × (– 4) × (3 × x – 2)	⟶	On repère tous les signes ×.
A = – 5x + 7 × (– 4)(3x – 2)	⟶	On supprime les signes × placés devant une lettre ou une parenthèse.
A = – 5x – 28(3x – 2)	⟶	On calcule si possible.

- Opposé d'une somme algébrique : l'opposé d'une somme algébrique est égal à la somme des opposés de chacun de ses termes.

Exemple 1 : Quel est l'opposé de la somme algébrique a + b – 2ab ?

L'opposé de a + b – 2ab est – (a + b – 2ab) = – a + (– b) + 2ab = – a – b + 2ab.

Développer une expression littérale

- Définition : développer une expression littérale signifie « enlever les enveloppes » c'est-à-dire écrire cette expression sans parenthèses.

- Distributivité simple : pour tous nombres k, a et b on a $\boxed{k \times (a+b) = k \times a + k \times b}$

- Distributivité simple : pour tous nombres k, a et b on a $\boxed{k \times (a-b) = k \times a - k \times b}$.

Exemple : Développe l'expression suivante : C = – 3,5(x – 2).

C = – 3,5 × (x – 2)	⟶	On replace le signe × dans l'expression.
C = (– 3,5) × x + (– 3,5) × (– 2)	⟶	On distribue le facteur – 3,5 aux termes x et – 2.
C = – 3,5x + 7	⟶	On calcule et on simplifie l'expression.

- Double distributivité : pour tous nombres a, b, c et d on a la relation suivante appelée formule de double distributivité $\boxed{(a+b) \times (c+d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d}$.

Exemple : Développe et simplifie l'expression suivante : D = (3x + 1)(y – 4).

D = (3x + 1)(y + (– 4)).	⟶	On transforme la soustraction.
D = 3x × y + 3x × (– 4) + 1 × y + 1 × (– 4)	⟶	On applique la double distributivité.
D = 3xy – 12x + y – 4	⟶	On calcule les produits et on simplifie.

Les trois identités remarquables

On peut utiliser la **double distributivité** pour **retrouver** les trois identités remarquables :

- $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
- $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
- $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$.

Réduire une somme algébrique

- Définition : **réduire une somme algébrique** revient à écrire cette somme **sans parenthèses** et **avec le moins de termes possible**.

Exemple 1 : Réduis l'expression : G = $5x^2 + (3x - 4) - (2x^2 - 3) + 2x$.

G = $5x^2 + 3x - 4 - 2x^2 + 3 + 2x$	$\longrightarrow$	On supprime les parenthèses.
G = $5x^2 - 2x^2 + 3x + 2x - 4 + 3$	$\longrightarrow$	On regroupe les termes.
G = $(5 - 2)\,x^2 + (3 + 2)\,x - 1$	$\longrightarrow$	On factorise les termes en x et en x^2.
G = $3x^2 + 5x - 1$	$\longrightarrow$	On simplifie.

Calculer la valeur numérique d'une expression

- Définition : pour **calculer la valeur numérique** d'une expression littérale, on **substitue** à la (ou aux) lettre(s) leur valeur numérique puis on **effectue les calculs** (en faisant réapparaître, si nécessaire les signes $\times$ nécessaires).

Vocabulaire

- Définition : une équation est **une expression** dans laquelle il y a toujours un **signe égal** et une ou plusieurs **inconnues** désignées chacune par une ou plusieurs **lettres**.

Exemple 1 : $2x^2 - 5 = x + 10$ est une équation où l'inconnue est désignée par la lettre x.
Cette équation a deux membres : $2x^2 - 5$ (membre de gauche) et $x + 10$ (membre de droite).

- Définition : **résoudre une équation** d'inconnue x, c'est **déterminer toutes les valeurs** de x (si elles existent) pour lesquelles **l'égalité est vraie**. Chacune de ces valeurs est appelée **solution de l'équation**.

Exemple 2 : Les solutions de l'équation $2x^2 - 5 = x + 10$ sont les valeurs du nombre x pour lesquelles l'égalité $2x^2 - 5 = x + 10$ est vérifiée.

Exemple 3 : 3 est-il une solution de l'équation $2x^2 - 5 = x + 10$?

Pour $x = 3$, on calcule séparément $2x^2 - 5$ et $x + 10$:
- $2x^2 - 5 = 2 \times 3^2 - 5 = 2 \times 9 - 5 = 13$
- $x + 10 = 3 + 10 = 13$

On constate qu'il y a égalité donc 3 est une solution de l'équation $2x^2 - 5 = x + 10$.

Résolution d'équations

- Propriété : une égalité **reste vraie** si on **ajoute** ou si on **soustrait** un **même nombre** à ses **deux membres**.

- Propriété : une égalité **reste vraie** si on **multiplie** ou si on **divise** ses **deux membres** par un **même nombre non nul**.

- Remarque : en **ajoutant une même quantité**, en **soustrayant une même quantité** aux deux membres de l'égalité ou bien **en multipliant**, **en divisant** les deux membres de l'égalité **par un même nombre non nul**, on essaye par étapes successives **d'isoler l'inconnue** (la lettre) afin de **déterminer sa valeur**. Lorsque **l'inconnue est isolée** alors **l'équation est résolue**.

Exemple : Résous l'équation $7x + 2 = 4x + 9$.

$$7x + 2 = 4x + 9$$
$$7x + 2 - 4x = 4x + 9 - 4x$$

⟶ **On élimine les termes en x dans le membre de droite** en retranchant $4x$ aux deux membres.

$$3x + 2 = 9$$
$$3x + 2 - 2 = 9 - 2$$

⟶ **On isole le terme en x dans le membre de gauche** en retranchant 2 aux deux membres.

$$3x = 7$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{7}{3}$$
$$x = \frac{7}{3}$$

⟶ **On cherche la valeur de l'inconnue x** en divisant les deux membres par 3.

Ainsi $7x + 2 = 4x + 9$ pour l'unique solution $x = \frac{7}{3}$.

Puis, on vérifie que $\frac{7}{3}$ est une solution de l'équation $7x + 2 = 4x + 9$ en appliquant la partie I.

Résolution de problème

- Définition : **mettre en équation** un problème, c'est **traduire son énoncé** par une **égalité mathématique** faisant intervenir **une ou plusieurs lettres**. C'est-à-dire, traduire son énoncé par une équation. Résoudre le problème revient alors à résoudre l'équation.

Exemple : Trouve le nombre tel que son quintuple augmenté de 7 soit égal à 3.

Étape n°1 : Choix de l'inconnue	Soit x le nombre cherché.	⟶ **On note** généralement l'inconnue x.
Étape n°2 : Mise en équation	Le quintuple du nombre augmenté de 7 est $5x + 7$. $5x + 7 = 3$	⟶ **On exprime les informations données** dans l'énoncé en fonction de x. ⟶ La phrase de l'énoncé se traduit ainsi.
Étape n°3 : Résolution de l'équation	$5x + 7 = 3$ $5x + 7 - 7 = 3 - 7$ $5x = -4$ $x = \frac{-4}{5}$	⟶ **On résout l'équation** à l'aide des propriétés de la partie II.
Étape n°4 : Vérification que la valeur trouvée est solution du problème	$5 \times \left(-\frac{4}{5}\right) + 7 = -4 + 7 = 3$	⟶ **On calcule.** Le quintuple de $-\frac{4}{5}$ augmenté de 7 est égal à 3.
Étape n°5 : Conclusion	Le nombre cherché est donc $-\frac{4}{5}$.	

Comparaison de nombres – Notion d'ordre

- Propriété : on **ne change pas** le sens d'une inégalité si on **ajoute** ou si on **soustrait** un **même nombre** à ses deux membres.

- Propriété : on **ne change pas** le sens d'une inégalité si on **multiplie** ou si on **divise** ses deux membres par un **même nombre positif non nul**.

- Propriété : par contre, on **change le sens** d'une inégalité si on **multiplie** ou si on **divise** ses deux membres par un **même nombre négatif non nul**.

Exemple : Sachant que $\sqrt{3}$ est un nombre compris entre 1,7 et 1,8, encadre $-2\sqrt{3}-7$.

$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$	⟶ On établit l'inégalité encadrant $\sqrt{3}$.
$-2\times 1{,}7 > -2\sqrt{3} > -2\times 1{,}8$ $-3{,}4 > -2\sqrt{3} > -3{,}6$	⟶ On **multiplie** l'inégalité par -2 qui est négatif donc on change le sens de l'inégalité.
$-3{,}6 < -2\sqrt{3} < -3{,}4$	⟶ Par convention, on écrit plutôt les signes « $<$ » : il suffit d'inverser les bornes de l'inégalité.
$-3{,}6-7 < -2\sqrt{3}-7 < -3{,}4-7$ $-10{,}6 < -2\sqrt{3}-7 < -10{,}4$	⟶ On **ajoute** -7 à l'inégalité ce qui ne change pas son sens.

$-2\sqrt{3}-7$ est un nombre compris entre $-10{,}6$ et $-10{,}4$.

Inéquations – Résolution d'inéquations

- Définition : une inéquation est **une inégalité** comportant **une ou plusieurs inconnues**.

- Définition : dire qu'un nombre est solution d'une inéquation signifie que **ce nombre vérifie l'inégalité**.

- Définition : **résoudre une inéquation** c'est **trouver tous les nombres** qui **vérifient l'inégalité**.

Exemple 1 : Résous l'inéquation suivante d'inconnue x : $7x-3>2x-1$.

$7x-3-2x>2x-1-2x$ $5x-3>-1$	⟶ On **soustrait** $2x$ à chaque membre et on réduit.
$5x-3+3>-1+3$ $5x>2$	⟶ On **ajoute 3** à chaque membre et on réduit.
$x>\frac{2}{5}$	⟶ On **divise** chaque membre par **5** qui est strictement positif donc le sens de l'inégalité ne change pas.

Les solutions sont tous les nombres strictement supérieurs à $\frac{2}{5}$.

Exemple 2 : Résous l'inéquation suivante d'inconnue x : $-3x-8\leqslant x-1$.

$-4x-8\leqslant -1$	⟶ On **soustrait** x à chaque membre.
$-4x\leqslant 7$	⟶ On **ajoute 8** à chaque membre.
$x\geqslant -\frac{7}{4}$	⟶ On **divise** chaque membre par -4 qui est strictement négatif donc on change le sens de l'inégalité.

Les solutions sont tous les nombres supérieurs ou égaux à $-\frac{7}{4}$.