

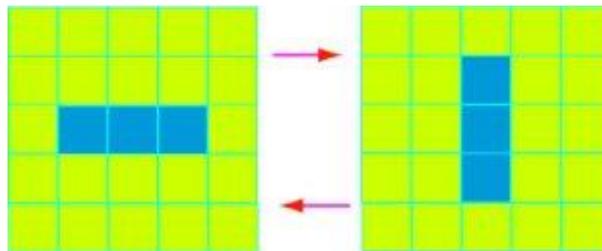
Le jeu de la vie, inventé en 1970 par John Conway, n'est pas vraiment un jeu. Ce terme est cependant moins rébarbatif que celui d'automate cellulaire, qui est pourtant plus exact. Il trouve ses origines dans des travaux conduits par John von Neumann dans les années 1940. Nous garderons la métaphore du jeu pour en parler, même si certains trouveront le terme mal adapté quand il s'agit de maladies potentiellement mortelles. L'essentiel est d'aider la compréhension...

Les règles du jeu de la vie

Pour jouer, prenez un damier et des pions. Les cases sont considérées comme des cellules ; elles peuvent être mortes ou vivantes. On utilise les pions pour matérialiser les cellules vivantes. Au début du jeu, on place des pions sur n'importe quelle case. On joue ensuite par étapes :

- une cellule morte entourée de trois cellules vivantes ressuscite, sinon elle reste morte,
- une cellule vivante reste en vie si elle a deux ou trois voisines vivantes, sinon elle meurt.

Bien que l'évolution du jeu soit complètement déterminée par la disposition initiale des cellules, on n'en assiste pas moins à quelques situations qui peuvent paraître surprenantes. Ainsi, en alignant tout simplement trois cellules vivantes les unes à côté des autres, on obtient une situation où les trois cellules se reproduisent, alignées horizontalement puis verticalement et ainsi de suite.

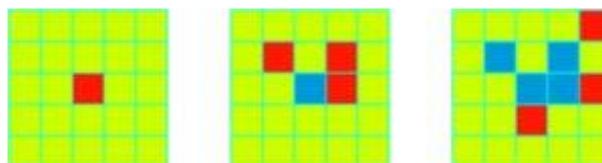


Lorsque trois cellules vivantes sont contiguës, on assiste à une oscillation entre trois cellules en ligne et trois en colonne.

Le jeu des épidémies

Ce jeu est loin d'être un simple amusement : il s'agit d'un exemple de ce que l'on nomme « automate cellulaire », particulièrement utile pour modéliser les processus d'expansion des épidémies comme des épizooties. En préalable à ce type d'application, il est nécessaire d'étendre le damier à l'infini. Au départ, toutes les cellules sont saines. On place une cellule infectée puis on « joue » avec la règle probabiliste suivante :

- les cellules voisines de la cellule infectée sont infectées au coup suivant avec la probabilité p ,
- la cellule meurt ou est immunisée le coup suivant.



Comment les cellules infectées (en rouge) se multiplient-elles au détriment des cellules saines (en vert) ?

La question qui intéresse autant les épidémiologistes que le grand public est donc : « Pour quelles valeurs de p , la maladie se propage-t-elle au monde entier ? ».

Un modèle probabiliste

Le modèle est ici « probabiliste », et donc on ne peut prédire à l'avance ce qui va se produire dans un cas particulier. Pour avoir une idée rapide de l'évolution moyenne du système, le mieux est de procéder à une simulation. Pour cela, on « joue » selon les règles énoncées ci-dessus en utilisant un générateur de nombres pseudo-aléatoires et on comptabilise le nombre de cellules infectées. En jouant cent fois de suite et en faisant la moyenne des résultats, on obtient une mesure de l'expansion moyenne de l'épidémie.

Taux critique

En dessous d'un certain taux de contamination p , l'épidémie ne s'étend pas. En revanche, au-dessus de ce taux, elle envahit le monde entier. Dans le cadre de notre modèle simplifié, le taux critique se situe entre 30 % et 40 %. Une maladie ne devient épidémique que si ce taux est dépassé. Comment ce modèle peut-il être adapté pour bien modéliser différents types d'épidémies ou d'épizooties ? Tout d'abord, on peut modifier le voisinage de chaque cellule, composé ici de huit cellules, les spécialistes parlent de voisinage de Moore, du nom d'Edward Moore, l'un des fondateurs de la théorie des automates. On utilise souvent un voisinage plus simple, dit de von Neumann, constitué des quatre cellules partageant un côté avec la cellule considérée. Avec ce nouveau modèle, le taux critique pour lequel une maladie devient épidémique se situe aux alentours de 60 %. On peut également améliorer le modèle en tenant compte du temps pendant lequel une cellule infectée est contagieuse puis du taux de mortalité et d'immunité ainsi que du temps d'immunité. On arrive ainsi à retrouver la façon dont se sont propagées des épidémies comme la peste dans l'Europe médiévale. Une première vague a tué le tiers de la population en se propageant à partir d'un épicode centré dans un port, suivie de plusieurs répliques plus faibles, toutes partant du même point. Ces répliques correspondent à la fin de certaines immunités.

La confrontation avec les données épidémiologiques a permis de montrer que ce type de modèles a une certaine pertinence pour toutes les maladies qui se propagent par contact direct : grippe, tuberculose, coronavirus ou même sida. En revanche, il ne fonctionne plus lorsque la maladie se propage via un agent infectieux, comme dans le cas du paludisme ou du chikungunya.

Géométrie des contagions

Comment considérer maintenant la notion de « cellule voisine » dès que l'on évoque les réseaux de transports aériens, maritimes ou terrestres ? Dans le cas d'une épidémie de grippe humaine, l'aéroport de Paris est voisin de celui de Hong-Kong. Dans le cas d'une épizootie de grippe aviaire, deux élevages fréquentant le même marché aux bestiaux sont voisins. On doit plus tenir compte des migrations naturelles des oiseaux sauvages. Dans tous ces cas, on retrouve la notion de réseaux.

En modifiant le modèle du jeu, on peut passer du cas où chaque cellule représente un individu à celui où elle représente un domaine où les individus sont en relation constante : un élevage de volaille dans le cas de la grippe aviaire, une ville dans le cas de la tuberculose, du sida ou de la grippe humaine. Ces domaines sont reliés entre eux pour former un réseau. Dans chaque cellule, la modélisation suit une autre logique, celle du modèle « SIR » dû à William Kermack et Anderson Mac Kendrick en 1927. Ce modèle compartimente la population en trois classes : S, la classe des individus susceptibles d'attraper la maladie, I, celle de ceux qui en sont infectés (et contagieuses) et R, ceux qui en sont guéris (et immunisés) ou décédés.

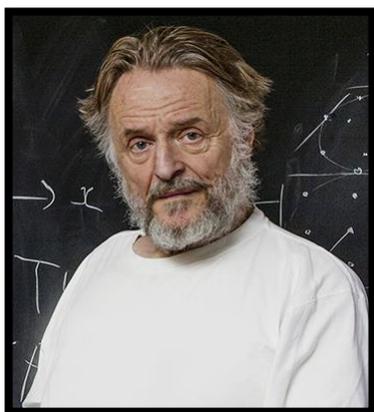
Seuil de propagation

On considère l'évolution de ces trois classes dans le temps en fonction de deux taux mesurables expérimentalement. Le premier a est le taux de contagion de la maladie pour un infecté, c'est-à-dire la probabilité pour qu'un individu susceptible attrape la maladie après contact avec un individu infecté. Le second taux b mesure le passage de l'état I à l'état R.

Après un laps de temps t , on compte $aISt$ infectés supplémentaires et R augmente de bIt . La variation du nombre d'infectés est donc égale à $aS - b$ multiplié par It . La condition pour que la maladie se propage (et donc donne lieu à une épidémie) est que le nombre de malades infectés augmente, c'est-à-dire que : $aS - b > 0$. Le quotient b/a a donc valeur de seuil. Si le nombre de sujets susceptibles est strictement inférieur à ce seuil, la maladie ne s'étend pas. Sinon, elle donne lieu à une épidémie (ou à une épizootie).

D'une façon qui peut paraître paradoxale, l'apparition d'une épidémie ne dépend donc pas du nombre de personnes infectées mais du nombre de personnes susceptibles d'attraper la maladie ! Cette remarque justifie à elle seule les politiques de vaccination, même avec un vaccin peu efficace.

L'article « [Le jeu de la vie et celui des épidémies](#) » a été publié le 19 mars 2020 sur [MATH'MONDE](#), le blog de [Herné LEHNING](#), professeur agrégé de mathématiques.



L'article « [John Horton Conway : un magicien des maths disparaît](#) » a été publié le lundi 13 avril 2020 sur le site [LaRecherche](#).

Le britannique John Horton Conway a été emporté par le Covid-19 le samedi 11 avril 2020, à Princeton (États-Unis). Il avait 82 ans. Touche à tout, il laisse derrière lui une œuvre marquante en mathématiques discrètes et en théorie des groupes. Quelques témoignages de ceux qui l'ont connu directement ou à travers ses inventions prolifiques font apparaître un mathématicien qui mêlait sans pareil amusement et profondeur du raisonnement.

Il n'aura fallu que trois jours au Covid-19 pour emporter l'un des plus prolifiques mathématiciens britanniques. Les premiers symptômes de fièvre sont apparus mercredi 8 avril, et John Horton Conway est mort le samedi 11 avril, à Princeton, à l'âge de 82 ans. Touche à tout des mathématiques, il laisse derrière lui une immense œuvre en mathématiques discrètes et en théorie des groupes. John Horton Conway surtout connu pour avoir inventé le jeu de la vie, un automate cellulaire aux propriétés autoreproductrices fascinantes. Pourtant, il détestait qu'on le réduise à cet automate cellulaire dont il avait énoncé le principe en 1970. Sa palette mathématique était d'une richesse insoupçonnée, et la liste de ses contributions cache des pépites inattendues. Enseignant adoré de ses élèves, conférencier hors pair, la transmission du savoir était autant ancrée en lui que les mathématiques « récréatives » dont il se réclamait parfois, avec un brin d'ironie toute britannique. Une brève biographie : 1937, naissance à Liverpool ; 1964 : doctorat à l'université de Cambridge où il obtient un poste ; 1981 : devient membre de la Royal Society ; 1986 : rejoint l'université de Princeton où il fera tout le reste de sa carrière ; 2020 : décès à Princeton. Et une série de réactions et de témoignages de mathématiciens de tous horizons qui ont croisé Conway...

« [Au fil des ans, j'ai apprécié chaque instant avec John](#) ». Pour le mathématicien Manjul Bhargava, médaillé Fields (2004), John Horton Conway était un géant des mathématiques. Il se sont rencontrés à Princeton quand Bhargava était jeune étudiant et ont été plus tard collègues durant des années. Le mathématicien partage ses souvenirs de ces fructueux échanges.

« [John se souciait beaucoup de la façon de présenter les problèmes mathématiques](#) ». Tanya Khovanova est mathématicienne, elle enseigne au MIT. Elle a bien connu Conway et tous ses aspects de mathématiques récréatives. C'était un showman mais avec toujours un objectif de faire comprendre les choses.

« [Sa façon d'enseigner n'était pas standard](#) ». En arrivant à Princeton, après le lycée, Alex Kontorovich suit les cours de John Conway. Une approche non standard et ludique des mathématiques qui fut marquante.

« [Il adorait tirer des lapins de son chapeau](#) ». Michel Broué, spécialiste de théorie des groupes, professeur émérite à l'université Paris-Diderot, évoque les contributions de Conway aux groupes sporadiques et à la classification des groupes.

« [Aucun autre mathématicien n'est parvenu à allier de la même façon amusement et formalisme](#) ». Timothy Gowers, professeur à Cambridge, médaille Fields (1998), évoque sa première rencontre avec Conway, au tout début de ses études.

« [Pour un enseignant, c'est un luxe immense de disposer des ressources de Conway](#) ». Roger Mansuy, professeur de mathématiques au Lycée Saint-Louis, à Paris, et membre de la Commission française pour l'enseignement des mathématiques (CFEM), est un grand lecteur de Conway dont les livres et articles lui servent à concocter exercices et exemples.

« [L'invention des nombres réels fait que je lui voue une admiration sans limite](#) ». Jean-Paul Delahaye, professeur émérite à l'université de Lille, vit avec les écrits de Conway depuis plus de 30 ans. Le jeu de la vie et les nombres réels sont pour lui deux de ses inventions fantastiques.

« [Transformer les mathématiques en magie créative](#) ». Louis H. Kauffman, spécialiste de théorie des nœuds, professeur émérite à l'université de l'Illinois à Chicago, raconte comment sa rencontre avec Conway a changé sa vie.

« [Conway a formalisé les critères de pavages en termes algébriques](#) ». Valérie Berthé, directrice de recherche CNRS, rappelle les travaux de Conway sur les pavages, domaine où il a établi des critères algébriques de « pavabilité ».

« [Il adorait parler avec les étudiants](#) ». Martin Andler, mathématicien, professeur à l'université de Versailles-Saint-Quentin, évoque les écoles d'été pour étudiants auxquelles participait Conway.

« [L'algorithme de Conway est tellement performant qu'il est valable pour toutes les dates de l'histoire](#) ». Michele Triestino, maître de conférences à l'Université de Bourgogne, est passionné par l'algorithme de Conway (doomsday).

« [Le jeu de la vie a été son plus grand succès public](#) ». Nazim Fatès, informaticien à l'Inria et spécialiste des automates cellulaires, explique que la recherche sur le jeu de la vie se poursuit.

Et pour finir, ou plutôt pour commencer, écouter [ici](#) et regarder [là](#). A vos maths, prêts, chercher !